

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh 1. dňa celoštátneho kola kategórie A

- 1 Pre kladné reálne čísla x, y, z platí $x^2 + y^2 + z^2 = 75$ a dva z troch súčtov $x + y, y + z, z + x$ sú aspoň 10. Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu zvyšného súčtu.

(Patrik Bak)

Riešenie 1:

Bez ujmy na všeobecnosti nech $x + y \geq 10$ a $z + x \geq 10$. Dokážeme, že najmenšia možná hodnota zvyšného súčtu je $10/3$ a najväčšia možná hodnota je 10.

Hodnotu $10/3$ je možné dosiahnuť v prípade $(x, y, z) = (25/3, 5/3, 5/3)$ a hodnotu 10 je možné dosiahnuť v prípade $(x, y, z) = (5, 5, 5)$.

- Dôkaz horného odhadu $y + z \leq 10$:

Nech $y + z > 10$. Keďže pre reálne čísla a a b platí $0 \leq (a - b)^2$, a teda $2ab \leq a^2 + b^2$, platí

$$\begin{aligned} 300 &= 3 \cdot 10^2 < (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 \\ &= 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2xy + 2yz + 2zx \leq 4(x^2 + y^2 + z^2) = 4 \cdot 75 = 300, \end{aligned}$$

čo je spor.

- Dôkaz dolného odhadu $y + z \geq 10/3$:

Platí $x < 10$, pretože v opačnom prípade $x^2 + y^2 + z^2 > x^2 \geq 100 > 75$. Preto $y, z \geq 10 - x > 0$, a teda $y^2, z^2 \geq (10 - x)^2$. Dostávame tak

$$\begin{aligned} 75 &= x^2 + y^2 + z^2 \geq x^2 + (10 - x)^2 + (10 - x)^2 = 3x^2 - 40x + 200, \\ 0 &\geq 3x^2 - 40x + 125 = (x - 5)(3x - 25), \\ 5 &\leq x \leq 25/3. \end{aligned}$$

Z toho už dostávame

$$y + z \geq (10 - x) + (10 - x) = 20 - 2x \geq 20 - 2 \cdot \frac{25}{3} = \frac{10}{3}.$$

Riešenie 2:

Nech $a = \frac{1}{2}(y + z)$, $b = \frac{1}{2}(z + x)$, $c = \frac{1}{2}(x + y)$. Potom $x = b + c - a$, $y = c + a - b$, $z = a + b - c$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $x + y \geq 10$ a $z + x \geq 10$, t. j. $b \geq 5$ a $c \geq 5$. Chceme nájsť najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu výrazu $y + z$ čiže $2a$.

Platí

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 + z^2 - 75 = (b + c - a)^2 + (a + c - b)^2 + (a + b - c)^2 - 75 \\ &= 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 2ab - 2bc - 2ca - 75 = 3a^2 - 2(b + c)a + (3(b^2 + c^2) - 2bc - 75). \end{aligned}$$

Číslo a je teda riešenie kvadratickej rovnice

$$0 = 3t^2 - 2(b + c)t + (3(b^2 + c^2) - 2bc - 75)$$

s neznámou t , takže

$$a \in \left\{ \frac{2(b + c) \pm \sqrt{4(b + c)^2 - 4 \cdot 3(3(b^2 + c^2) - 2bc - 75)}}{2 \cdot 3} \right\} = \left\{ \frac{b + c \pm \sqrt{225 - 8(b^2 + c^2) + 8bc}}{3} \right\},$$

z čoho

$$\frac{b + c - \sqrt{225 - 8(b^2 + c^2) + 8bc}}{3} \leq a \leq \frac{b + c + \sqrt{225 - 8(b^2 + c^2) + 8bc}}{3}.$$

Použitím nerovnosti medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom dostaneme

$$a \leq \frac{b + c + \sqrt{225 - 8(b^2 + c^2) + 8bc}}{3} \leq \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + \sqrt{225 - 8(b^2 + c^2) + 8bc}}{3}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{b^2 + c^2 + 225 - 8(b^2 + c^2) + 8bc}{3}} = \sqrt{\frac{225 - 7(b^2 + c^2) + 8bc}{3}} \\
&= \sqrt{\frac{225 - 3(b^2 + c^2) - 4(b - c)^2}{3}} \leq \sqrt{\frac{225 - 3(b^2 + c^2)}{3}} \leq \sqrt{\frac{225 - 3(5^2 + 5^2)}{3}} = 5,
\end{aligned}$$

a teda

$$y + z = 2a \leq 10.$$

Rovnako ako v prvom riešení je táto hodnota dosiahnutá v prípade $x = y = z = 5$.

Platí tiež

$$\begin{aligned}
a &\geq \frac{b + c - \sqrt{225 - 8(b^2 + c^2) + 8bc}}{3} = \frac{(b + c) - \sqrt{225 - 4(b^2 + c^2) - 4(b - c)^2}}{3} \\
&\geq \frac{(b + c) - \sqrt{225 - 4(b^2 + c^2)}}{3} \geq \frac{(5 + 5) - \sqrt{225 - 4(5^2 + 5^2)}}{3} = \frac{5}{3},
\end{aligned}$$

a teda

$$y + z = 2a \geq \frac{10}{3}.$$

Rovnako ako v prvom riešení je táto hodnota dosiahnutá v prípade $x = 25/3$ a $y = z = 5/3$.

- 2 Nech ABC je ostrouhlý trojuholník a nech T je jeho ťažisko. Nech P je bod kratšieho oblúka s krajnými bodmi B a C kružnice opísanej ABC a nech Q je päta kolmice z bodu P na úsečku BC . Nech X je priesečník priamky QT a rovnobežky s BC cez bod A a nech S je stred úsečky PX . Dokážte, že $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle SAC|$.

(Michal Jančík)

Riešenie:

Najskôr vyriešime prípad, keď je bod P stred kratšieho oblúka s krajnými bodmi B a C kružnice opísanej trojuholníku ABC . Priamka AP je tak os uhla BAC . Bod Q je v tomto prípade stred úsečky BC , takže QT splyva s ťažnicou z vrcholu A . Bod X tak splyva s bodom A a bod S leží na priamke AP . Keďže AP je os uhla BAC , platí $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle SAC|$.

Vo zvyšku riešenia predpokladajme, že bod P je rôzny od stredy kratšieho oblúka s krajnými bodmi B a C kružnice opísanej trojuholníku ABC . Nech R je bod na kružnici opísanej trojuholníku ABC rôzny od bodu P taký, že platí $PR \parallel BC$. Z tejto rovnobežnosti vyplýva, že $BPRC$ je rovnoramenný lichobežník, a teda obvodové uhly BAP a RAC majú rovnakú veľkosť. Aby sme ukázali, že platí $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle SAC|$, stačí ukázať, že body A , S , R ležia na priamke.

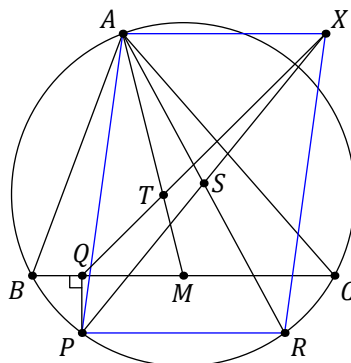
Ukážeme, že $APRX$ je rovnobežník. Vieme, že platí $AX \parallel BC$ a $BC \parallel PR$, takže $AX \parallel PR$. Stačí tak ukázať, že $|AX| = |PR|$.

Nech M je stred úsečky BC . Keďže body M a Q ležia na priamke BC , z rovnobežnosti AX a BC máme, že trojuholníky TAX a TMQ sú rovnohlavé so stredom T , preto

$$\frac{|AX|}{|MQ|} = \frac{|AT|}{|MT|} = 2,$$

lebo T je ťažisko ABC .

Keďže $BPRC$ je rovnoramenný lichobežník a je symetrický podľa osi BC , platí $|PR| = 2 \cdot |MQ|$, a preto platí $|AX| = 2 \cdot |MQ| = |PR|$. To spolu s rovnobežnosťou PR a AX dáva, že $APRX$ je rovnobežník. Bod S je stred jeho uhlopriečky PX , takže je to priesečník jeho uhlopriečok, a teda leží aj na uhlopriečke AR (dokonca je to jej stred). Preto $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle RAC| = |\sphericalangle SAC|$.



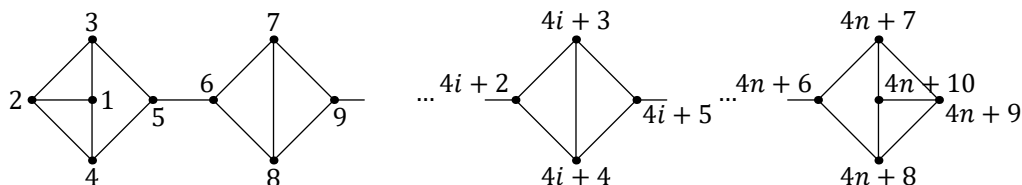
- 3 Povieme, že skupina ľudí je *trojznámostová*, keď sa každý jej člen pozná presne s tromi ďalšími členmi a skupinu nie je možné rozdeliť na dve neprázdne časti tak, aby každý ich člen mal všetkých svojich známych vo svojej časti. (Vzťah známosti je vzájomný.) Určte najväčšie prirodzené číslo k také, že $k \geq 3$ a existuje prirodzené číslo n také, že z každej trojznámostovej skupiny aspoň s n ľuďmi sa dá vybrať aspoň k ľudí a posadiť ich k okrúhlemu stolu tak, že sa každý dvaja susedia poznajú.

(Jozef Rajník)

Riešenie:

Ukážeme, že $k = 5$. Skupinu ľudí, v ktorej možno vybrať k ľudí a posadiť ich okolo okrúhleho stola tak, aby sa každý dvaja susedia poznali, budeme volať k -okrúhla.

Najskôr ukážeme, že žiadne k také, že $k \geq 6$, nevyhovuje. To spravíme tak, že pre každé prirodzené číslo n nájdeme trojznámostovú skupinu $4n + 10$ ľudí, ktorá nie je k -okrúhla. Konštrukcia je znázornená na obrázku. Vrcholy grafu zodpovedajú ľuďom, hrany zodpovedajú známostiam.



Členov očísľujeme od 1 po $4n + 10$ a celú skupinu rozdelíme na $n + 2$ častí:

- členovia 1, 2, 3, 4, 5 s dvojicami známych $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 5\}$;
- pre každé $i \in \{1, \dots, n\}$ členovia $4i + 2, 4i + 3, 4i + 4, 4i + 5$ s dvojicami známych $\{4i + 2, 4i + 3\}, \{4i + 2, 4i + 4\}, \{4i + 3, 4i + 4\}, \{4i + 3, 4i + 5\}, \{4i + 4, 4i + 5\}$;
- členovia $4n + 6, 4n + 7, 4n + 8, 4n + 9, 4n + 10$ s dvojicami známych $\{4n + 6, 4n + 7\}, \{4n + 6, 4n + 8\}, \{4n + 7, 4n + 9\}, \{4n + 7, 4n + 10\}, \{4n + 8, 4n + 9\}, \{4n + 8, 4n + 10\}$.

Okrem toho sa pre každé $i \in \{1, \dots, n + 1\}$ poznajú ešte dvojice $\{4i + 1, 4i + 2\}$, ktoré sú tak jediným prepojením svojich častí.

Takáto skupina ľudí je zrejme trojznámostová.

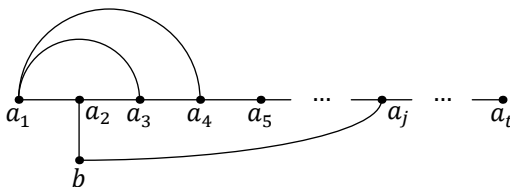
Ak by za stolom sedeli dvaja ľudia z rôznych častí, po oboch oblúkoch stola medzi nimi by musela sedieť tá istá dvojica $\{4i + 1, 4i + 2\}$ pre niektoré $i \in \{1, \dots, n + 1\}$. Preto za stolom môžu sedieť len členovia jednej časti. Keďže každá časť má najviac 5 členov, nemožno za okrúhly stôl usadiť viac ako 5 ľudí.

Vo zvyšku riešenia dokážeme sporom, že každá skupina aspoň s 5 ľuďmi je 5-okrúhla. Nech teda existuje nejaká aspoň 5-členná trojznámostová skupina ľudí, ktorá nie je 5-okrúhla. Vezmime najdlhšiu postupnosť P , kde $P = (a_1, \dots, a_t)$, rôznych členov uvažovanej skupiny, v ktorej sa ľubovoľní dvaja susední ľudia poznajú. Keďže naša skupina nie je 5-okrúhla, jej člen a_1 nepozná žiadneho člena a_i , kde $i \geq 5$. Taktiež všetci jeho známi musia byť v postupnosti P , inak by sme vedeli postupnosť P predĺžiť. Preto $t \geq 4$ a člen a_1 pozná práve členov a_2, a_3, a_4 .

Nech $t = 4$. Keďže postupnosť P nemožno predĺžiť, člen a_4 pozná členov a_1, a_2, a_3 . Dostávame skupinu štyroch ľudí, v ktorej sa každý pozná s každým, teda nepoznajú žiadneho z ostatných členov. Pritom aspoň jeden člen mimo tejto štvorice existuje, lebo skupina ich má aspoň 5. Dostali sme tak rozdelenie na dve neprázdne skupiny, ktoré je v spore s vlastnosťou trojznámostovej skupiny zo zadania. Preto platí $t \geq 5$.

Keďže člen a_4 pozná členov a_1, a_3, a_5 , členovia a_2 a a_4 sa nepoznajú. Člen a_2 pozná členov a_1, a_3 . Jeho tretieho známeho označme b . Ak by platilo $b = a_i$ pre nejaké i , tak by platilo $i \geq 5$ a vedeli by sme do kruhu posadiť ľudí $a_1, a_3, a_4, \dots, a_i, a_2$, ktorých je i , teda aspoň 5, čo by bol spor. Preto sa člen b nenachádza v postupnosti P .

Ak by mal b známeho mimo postupnosti P , označme ho c , existovala by dlhšia postupnosť $(c, b, a_2, a_3, \dots, a_t)$, čo by bol spor. Teda člen b má okrem a_2 nejakého známeho a_j . Členovia a_1, a_3, a_4 už majú všetkých troch ich známych v postupnosti P , preto $j \geq 5$.



Potom však vieme do kruhu posadiť j členov $b, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_j$, čo je spor. Tým sme ukázali, že každá trojznámostová skupina s aspoň 5 ľuďmi je 5-okrúhla.

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh 2. dňa celoštátneho kola kategórie A

- 4 Nech a a b sú rôzne nenulové prirodzené čísla také, že čísla $a^2 + 1$ a $ab + 1$ majú rovnaké množiny prvočiniteľov. Dokážte, že číslo $a^2 + b^2 + 2$ je deliteľné druhou mocninou niektorého prvočísla.

(Dominik Martin Rigász)

Riešenie:

Nech p je prvočíselný deliteľ čísla $ab + 1$. Keďže čísla $a^2 + 1$ a $ab + 1$ majú rovnaké množiny prvočiniteľov, platí $p \mid a^2 + 1$. Potom $p \mid (a^2 + 1) - (ab + 1) = a(a - b)$. Avšak čísla a a $ab + 1$ sú nesúdeliteľné a $p \mid ab + 1$, preto nemôže platiť $p \mid a$, a teda platí $p \mid a - b$. Takže ak nejaké prvočíslo p delí $ab + 1$, tak delí aj $a^2 + 1$ a aj $a - b$.

Ukážeme sporom, že existuje prvočíslo p také, že $p^2 \mid ab + 1$. Potom bude platiť $p \mid a - b$, takže $p^2 \mid (a - b)^2$, a preto $p^2 \mid (a - b)^2 + 2(ab + 1) = a^2 + b^2 + 2$, čo chceme ukázať.

Predpokladajme teda, že $ab + 1$ nie je deliteľné druhou mocninou žiadneho prvočísla. Ako sme už ukázali, každé prvočíslo, ktoré delí $ab + 1$, delí aj $a - b$. Keďže $ab + 1$ nie je deliteľné druhou mocninou žiadneho prvočísla, platí $ab + 1 \mid a - b$. Keďže a a b sú rôzne nenulové prirodzené čísla, dostávame

$$ab < ab + 1 \leq |a - b| < \max\{a, b\} \leq ab,$$

čo je spor.

Poznámka:

Dvojica (a, b) , ktorá spĺňa podmienky zo zadania, je napríklad $(3, 13)$: Pre ňu platí $a^2 + 1 = 2 \cdot 5$, $ab + 1 = 2^3 \cdot 5$ a $a^2 + b^2 + 2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$. Iné dvojice spĺňajúce podmienky sú napríklad $(31, 993)$ a $(13, 523)$, pre ne majú $a^2 + 1$ a $ab + 1$ tri prvočinitele

- 5 Nech $\{a_1, a_2, \dots, a_{2026}\} = \{1, 2, \dots, 2026\}$ a pre každé prirodzené číslo i platí $a_{i+2026} = a_i$. Určte najmenší možný aj najväčší možný počet indexov i z množiny $\{1, 2, \dots, 2026\}$ takých, že každé z 2026 čísel

$$\begin{aligned} &a_i, \\ &a_i - a_{i+1}, \\ &a_i - a_{i+1} + a_{i+2}, \\ &a_i - a_{i+1} + a_{i+2} - a_{i+3}, \\ &\vdots \\ &a_i - a_{i+1} + \dots - a_{i+2023} + a_{i+2024}, \\ &a_i - a_{i+1} + \dots - a_{i+2023} + a_{i+2024} - a_{i+2025}. \end{aligned}$$

je nezáporné.

(Jakub Krivošík)

Riešenie:

Platí

$$a_1 + \dots + a_{2006} = 1 + 2 + \dots + 2026 = 2026 \cdot 2027/2 = 1013 \cdot 2027,$$

čo je nepárne číslo. To znamená, že súčet všetkých čísel s párnymi indexmi je rôzny od súčtu všetkých čísel s nepárnymi indexmi, a teda jeden z týchto súčtov je menší. Bez ujmy na všeobecnosti budeme predpokladať, že menší súčet je na párných pozíciách.

Potom žiadny párný index i nevyhovuje, pretože

$$a_i - a_{i+1} + \dots + a_{i+2024} - a_{i+2025} = (a_i + a_{i+2} + \dots + a_{i+2024}) - (a_{i+1} + a_{i+3} + \dots + a_{i+2025}) < 0.$$

Stačí teda skúmať nepárne indexy.

- Nájdeme hľadaný najväčší počet:

Nepárnych indexov je 1013. Ukážeme, že tento počet je možné dosiahnuť, a to napríklad v prípade $a_1 = 2026$, $a_2 = 2025$, ..., $a_{2026} = 1$. Každý člen s párnym indexom je o 1 menší ako predchádzajúci, takže

$$(a_{2i+1} - a_{2i+2}) + \dots + (a_{2j+1} - a_{2j+2}) \geq 0,$$

a potom aj

$$a_{2i+1} - a_{2i+2} + \dots + a_{2j+1} - a_{2j+2} + a_{2j+3} = (a_{2i+1} - a_{2i+2} + \dots + a_{2j+1} - a_{2j+2}) + a_{2j+3} \geq 0.$$

Všetkých 1013 nepárnych indexov teda vyhovuje, takže hľadaný najväčší možný počet je 1013.

- Nájdeme hľadaný najmenší počet:

Nech pre každé $i \in \{1, \dots, 1013\}$ platí $b_i = a_{2i-1} - a_{2i}$ a pre každé prirodzené číslo i platí $b_{i+1013} = b_i$.

Potom

$$b_1 + \dots + b_{1013} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{2025} - (a_2 + a_4 + \dots + a_{2026})) > 0.$$

Index $2j + 1$ vyhovuje práve vtedy, keď je každé z 2026 čísel

$$a_{2j+1}, \quad b_{j+1}, \quad b_{j+1} + a_{2j+3}, \quad b_{j+1} + b_{j+2}, \quad \dots, \quad b_{j+1} + \dots + b_{j+1012} + a_{2j+2025}, \quad b_{j+1} + \dots + b_{j+1013}$$

nezáporné, čo je vzhľadom na kladnosť $a_1, a_3, \dots, a_{2025}$ práve vtedy, keď je každé z 1013 čísel

$$b_{j+1}, \quad b_{j+1} + b_{j+2}, \quad \dots, \quad b_{j+1} + b_{j+2} + \dots + b_{1013} + b_1 + \dots + b_j$$

nezáporné.

Nech m je najmenší index taký, že $b_1 + \dots + b_m$ je minimálny. Ukážeme, že aspoň jeden z indexov 1 a $2m + 1$ vyhovuje. Rozoberme prípady:

- Nech $b_1 + \dots + b_m \geq 0$.

Potom je každé z čísel

$$b_{j+1}, \quad b_{j+1} + b_{j+2}, \quad \dots, \quad b_{j+1} + b_{j+2} + \dots + b_{1013} + b_1 + \dots + b_j$$

nezáporné, takže index 1 vyhovuje.

- Nech $b_1 + \dots + b_m < 0$.

Ak by pre nejaké prirodzené číslo k spĺňajúce $m + 1 \leq k \leq 1013$ platilo $b_{m+1} + \dots + b_k < 0$, tak

$$b_1 + \dots + b_k = (b_1 + \dots + b_m) + (b_{m+1} + \dots + b_k) < b_1 + \dots + b_m,$$

čo by bolo v spore s definíciou m . Pre každé k spĺňajúce $m + 1 \leq k \leq 1013$ preto platí $b_{m+1} + \dots + b_k \geq 0$.

Z definície m pre každé prirodzené číslo k spĺňajúce $1 \leq k \leq m$ platí

$$b_{m+1} + \dots + b_{1013} + b_1 + \dots + b_k = (b_{m+1} + \dots + b_{1013}) + (b_1 + \dots + b_k)$$

$$\geq (b_{m+1} + \dots + b_{1013}) + (b_1 + \dots + b_m) = b_1 + \dots + b_{1013} > 0.$$

Ukázali sme tak, že každé z čísel

$$b_{m+1}, \quad b_{m+1} + b_{m+2}, \quad \dots, \quad b_{m+1} + b_{m+2} + \dots + b_{1013} + b_1 + \dots + b_m$$

je nezáporné, takže index vyhovuje.

Hľadaný najmenší počet je teda aspoň 1.

Túto hodnotu je možné dosiahnuť v prípade $a_1 = 2026$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, ..., $a_{2026} = 2025$, kde pre každé i z $\{2, 3, \dots, 2026\}$ platí $a_i - a_{i+1} = -1$, a teda i nevyhovuje. Jediný vyhovujúci index tak môže byť 1.

Hľadaný najmenší počet je teda 1.

- 6 Nech $ABCDEF$ je šesťuholník vpísaný do kružnice so stredom O taký, že každé jeho dve protíahlé strany sú rovnobežné. Priamky AB , CD , EF určujú trojuholník Δ_1 a priamky BC , DE , FA určujú trojuholník Δ_2 . Dokážte, že stredy kružníc opísaných trojuholníkom Δ_1 a Δ_2 sú súmerne združené podľa bodu O .

(Michal Janík)

Riešenie:

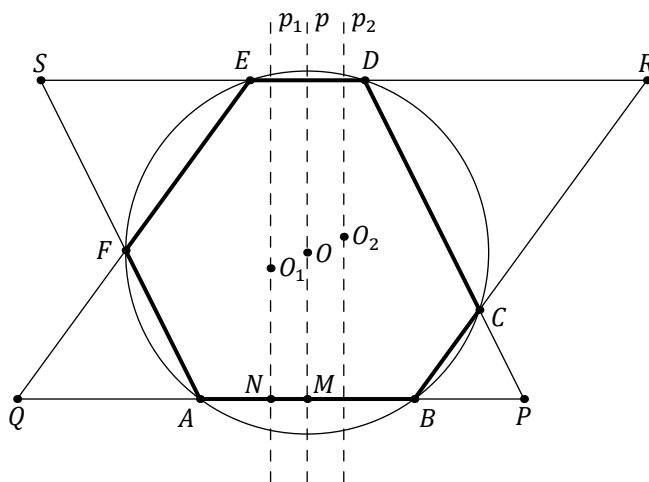
Nech O_1 a O_2 sú stredy kružníc opísaných trojuholníkom Δ_1 , resp. Δ_2 a nech p_1 , p_2 a p sú kolmice na AB prechádzajúce postupne bodmi O_1 , O_2 a O .

Označme P a Q priesečníky priamky AB postupne s priamkami CD a EF . Podobne označme R a S priesečníky priamky DE postupne s priamkami BC a FA . Priamka p_1 je os úsečky PQ , keďže je to kolmica na tetivu PQ prechádzajúca stredom kružnice opísanej trojuholníku Δ_1 . Podobne p_2 je os úsečky RS . Priamka p je spoločná os úsečiek AB a DE , keďže tieto úsečky sú tetivy zadanej kružnice so stredom O a p je na tieto úsečky kolmá.

Nech N je stred úsečky PQ a M stred úsečky AB . Keďže priamky p_1 a p sú postupne osi úsečiek PQ a AB , bod N leží na p_1 a bod M leží na p . Potom $\overrightarrow{NM}$ je vektor posunutia zobrazujúceho priamku p_1 na p , ktorý je zároveň kolmý na priamku p . Platí

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NP} - \overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{QP}}{2} - (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BP}) = \frac{\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}}{2} - \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{BP} \right) = \frac{\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{BP}}{2}.$$

Analogicky je vektor posunutia zobrazujúceho p_2 na p a kolmý na p rovný $\frac{\overrightarrow{RD} - \overrightarrow{ES}}{2}$.



Keďže $APDS$ a $QBRE$ sú rovnobežníky, platí

$$\frac{\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{BP}}{2} = \frac{\overrightarrow{QB} - \overrightarrow{AP}}{2} = \frac{\overrightarrow{ER} - \overrightarrow{SD}}{2} = \frac{\overrightarrow{DR} - \overrightarrow{SE}}{2} = -\frac{\overrightarrow{RD} - \overrightarrow{ES}}{2},$$

takže vektory posunutí p_1 a p_2 na p majú rovnakú veľkosť a opačnú orientáciu, a teda priamky p_1 a p_2 sú súmerne združené podľa priamky p . Sú preto súmerne združené aj podľa bodu O , ktorý na priamke p leží.

Nech q_1 , q_2 a q sú kolmice na BC prechádzajúce postupne bodmi O_1 , O_2 a O . Analogicky sú priamky q_1 a q_2 súmerne združené podľa bodu O .

Keďže O_1 je priesečník priamok p_1 a q_1 a O_2 je priesečník priamok p_2 a q_2 , aj body O_1 a O_2 sú súmerne združené podľa bodu O .