

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh domácej prípravy kategórie Z6

1 V nasledujúcom sčítacom algebrograme zodpovedajú rôzne písmená rôznym cifrá a rovnaké rovnakým:

$$\begin{array}{r} T \ O \ N \ A \\ O \ N \ A \\ N \ A \\ A \\ \hline 8 \ 6 \ 5 \ 4 \end{array}$$

Nahrad'te písmená ciframi tak, aby bol výpočet správny. Nájdite všetky možnosti.

(Iveta Jančígová)

Riešenie:

Písmená budeme odhaľovať odzadu (od jednotiek k tisícom). Súčet štyroch A musí končiť cifrou 4, čo je možné v prípade $A = 1$ alebo v prípade $A = 6$. Oba prípady rozoberieme:

- V prípade $A = 1$ platí $4 \cdot A = 4$, a nedochádza tak k prechodu cez desiatku. Súčet troch N sa má končiť na 5, čo je možné iba v prípade $N = 5$. Teda $3 \cdot N = 15$ a cez desiatku prechádza 1. Súčet dvoch O a 1 sa má končiť na 6, čo nie je možné, lebo $2O + 1$ je nepárne a 6 párne. Tento prípad teda k riešeniu nevedie.
- V prípade $A = 6$ platí $4 \cdot A = 24$, takže cez desiatku prechádza 2. Súčet troch N a 2 sa má končiť na 5, čo je možné iba v prípade $N = 1$. Teda $3 \cdot N + 2 = 5$, a nedochádza tak k prechodu cez desiatku. Súčet dvoch O sa má končiť na 6, čo je možné v prípade $O = 3$ alebo v prípade $O = 8$. Príslušné doplnenia vyzerajú takto:

$$\begin{array}{r} 8 \ 3 \ 1 \ 6 \\ 3 \ 1 \ 6 \\ 1 \ 6 \\ 6 \\ \hline 8 \ 6 \ 5 \ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \ 8 \ 1 \ 6 \\ 8 \ 1 \ 6 \\ 1 \ 6 \\ 6 \\ \hline 8 \ 6 \ 5 \ 4 \end{array}$$

Písmená je možné nahradiť ciframi dvoma práve uvedenými spôsobmi.

2 Od 1. januára bol pán Novák zamestnaný v novej firme, pričom nástupná výška jeho platu bola 1550 eur mesačne. Pretože sa osvedčil, od istého mesiaca v prvom polroku mu zvýšili plat o niekoľko celých eur. Takýto plat dostával mesačne už vo všetkých ďalších mesiacoch. Za celý rok si zarobil dokopy 20000 eur.

Za ktorý mesiac mohol dostať prvýkrát zvýšený plat a o koľko eur? Nájdite všetky možnosti.

(Marián Macko)

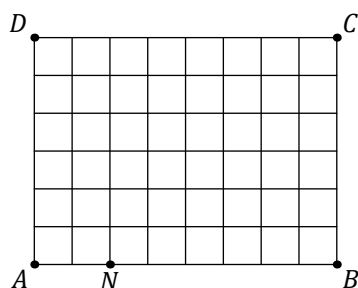
Riešenie:

Ak by pánovi Novákovi plat nezvýšili, tak by si za celý rok zarobil $12 \cdot 1550$ čiže 18600 eur. Rozdiel medzi týmto a jeho skutočným zárobkom je $20000 - 18600$ čiže 1400 eur.

Čiastka 1400 eur je násobkom počtu eur, o ktorý mu bol zvýšený mesačný plat. Zvýšený plat dostával aspoň pol roka, teda nás zaujímajú delitele čísla 1400 v rozpätí od 6 do 12, čo sú práve 7, 8 a 10:

- 7 mesiacov vyššieho príjmu znamená zvýšenie platu od júna, a to o čiastku $1400 : 7$ čiže 200 eur.
- 8 mesiacov vyššieho príjmu znamená zvýšenie platu od mája, a to o čiastku $1400 : 8$ čiže 175 eur.
- 10 mesiacov vyššieho príjmu znamená zvýšenie platu od marca, a to o čiastku $1400 : 10$ čiže 140 eur.

3 Obdĺžnik $ABCD$ rozmerov 8×6 je pomocou vodorovných a zvislých čiar rozdelený na rovnaké štvorčeky a bod N leží v štvrtine jeho dlhšej strany AB bližšie k A , tak ako vidíme na obrázku.



Rozdeľte obdĺžnik $ABCD$ tromi úsečkami so spoločným bodom N na štyri časti s rovnakými obsahmi.

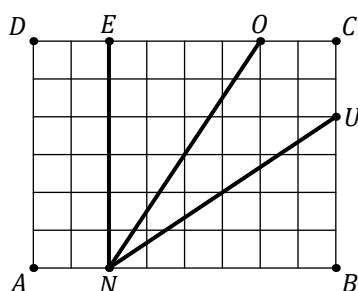
(Daniela Kovalčíková)

Riešenie:

Obsahy budeme vyjadrovať pomocou počtov štvorcíkov obdĺžnika.

Obdĺžnik $ABCD$ pozostáva z $8 \cdot 6$ čiže 48 štvorcíkov, teda každá zo štyroch častí bude mať obsah $48 : 4$ čiže 12 štvorcíkov. Každá z troch deliacich úsečiek má jeden krajný bod N , druhý bude na obvodě obdĺžnika $ABCD$.

Ak prejdeme postupne cez mrežové body na obvodě obdĺžnika $ABCD$, nájdeme vyhovujúce riešenie:



Naozaj:

- Obsah obdĺžnika $NEDA$ je $2 \cdot 6$ čiže 12 štvorcíkov.
- Obsah každého z pravouhlých trojuholníkov NOE a NBU je $6 \cdot 4/2$ čiže 12 štvorcíkov,
- Obsah štvoruholníka $NUCO$ nemôže byť iný, lebo $48 - 3 \cdot 12 = 12$.

Ak by sa ktorýkoľvek z bodov E, O, U posunul, príslušná časť by sa zmenšila alebo zväčšila, je to teda teda jediné riešenie.

Poznámka:

Obsah štvoruholníka $NUCO$ je možné vyjadriť priamo pomocou trojuholníkov NUC a NOC , z ktorých každý má obsah $2 \cdot 6/2$ čiže 6 štvorcíkov.

- 4 Majme jedno trojčiferné a jedno dvojčiferné číslo. Trojčiferné číslo zaokrúhlime na stovky a dvojčiferné zaokrúhlime na desiatky. Rozdiel zaokrúhlených čísel je 500.

Aký najmenší a aký najväčší môže byť rozdiel pôvodných nezaokrúhlených čísel?

(Marián Macko)

Riešenie:

Dvojčiferné čísla zaokrúhlené na desiatky sú násobkom 10 v rozpätí od 10 do 100. Trojčiferné čísla zaokrúhlené na stovky sú násobkom 100 v rozpätí od 100 do 1000.

Rozdiel zaokrúhlených čísel bol 500, teda nemohol vzniknúť inak ako $600 - 100$. Trojčiferné číslo bolo zaokrúhlené na 600, teda to bolo číslo v rozpätí od 550 do 649. Dvojčiferné číslo bolo zaokrúhlené na 100, teda to bolo číslo v rozpätí od 95 do 99.

Najmenší možný rozdiel nezaokrúhlených čísel je $550 - 99$ čiže 451 a najväčší $649 - 95$ čiže 554.

- 5 Peťo má ku každému dňu v týždni priradenú farbu: k pondelku modrú, k utoru zelenú, k strede bielu, k štvrtku červenú, k piatku oranžovú, k sobote sivú a k nedeli hnedú. V týchto farbách nosí aj ponožky, a to tak, že na pravej nohe má ponožku farby dňa, avšak na ľavej nohe nemá ponožku farby tohto dňa ani dňa nasledujúceho. (Napri. v sobotu má na pravej nohe sivú ponožku a na ľavej nemá sivú ani hnedú.)

Určte, ktorý je deň, ak mal Peťo na ľavej nohe predvčerom modrú ponožku, včera červenú a dnes má na nej hnedú.

(Monika Dillingerová)

Riešenie:

Hnedú ponožku na ľavej nohe Peťo nenosí v nedeľu ani v sobotu. Dnes teda nie je nedeľa ani sobota.

Červenú ponožku na ľavej nohe nenosí vo štvrtok ani v stredu. Teda včera nebol štvrtok ani streda, dnes nie je piatok ani štvrtok.

Modrú ponožku na ľavej nohe nenosí v pondelok ani v nedeľu. Teda predvčerom nebolo pondelok ani nedeľa, dnes nie je streda ani utorok.

Vylúčili sme všetky dni v týždni okrem pondelka. Takže dnes musí byť pondelok.

Poznámka:

Predchádzajúce úvahy sú zhrnuté v nasledujúcej tabuľke. Na prvých dvoch riadkoch skracujeme názvy dní v týždni a zodpovedajúce farby, na zvyšných riadkoch kontrolujeme podmienky kladené na Peťovu ľavú ponožku (1 – možné, 0 – nemožné):

deň	pondelok	utorok	streda	štvrtok	piatok	sobota	nedeľa
farba	modrá	zelená	biela	červená	oranžová	sivá	hnedá
hnedeľ dnes	1	1	1	1	1	0	0
červená včera	1	1	1	0	0	1	1
modrá predvčerom	1	0	0	1	1	1	1

- 6 Obdĺžnikový park má obvod 228 metrov. Vo vrcholoch obdĺžnika a na jeho stranách rástlo 38 okrasných kríkov tak, že vzdialenosti medzi každými dvoma susednými kríkmi boli rovnaké. Na dvoch protiľahlých stranách obdĺžnika zasadil záhradník medzi každé dva kríky jeden ďalší. Tým zvýšil počet kríkov po obvode parku na 60.

Určte rozmery parku.

(Marián Macko)

Riešenie:

Kríky boli vo vrcholoch obdĺžnika a potom rovnomerne po celom obvode. Pôvodná vzdialenosť medzi susednými kríkmi bola $228 : 38$ čiže 6 metrov.

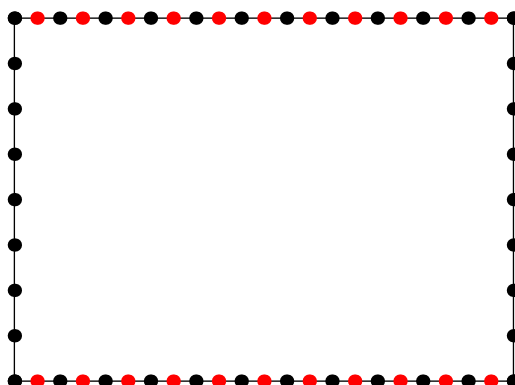
Novovysadených bolo $60 - 38$ čiže 22 kríkov, teda na každú z dvoch protiľahlých strán obdĺžnika pripadá 11 kríkov. Tieto kríky boli zasadené do medzier medzi kríkmi, ktoré tam už rástli. Teda tieto strany obdĺžnika merajú $11 \cdot 6$ čiže 66 metrov, t. j. spolu 132 metrov.

Do obvodu celého obdĺžnika chýba $228 - 132$ čiže 96 metrov, čo zodpovedá súčtu dĺžok druhej dvojice protiľahlých strán. Teda tieto strany merajú $96 : 2$ čiže 48 metrov.

Rozmery parku sú 66 a 48 metrov.

Poznámka:

Na každej zo strán obdĺžnika, kam záhradník vysadil nové kríky, ich pôvodne bolo 12 (kríky sadil do 11 medzier). Teda na týchto dvoch stranách ich spolu bolo 24 a do pôvodného počtu chýbalo 14. To zodpovedá 7 ďalším kríkom na každej z dvoch zostávajúcich strán (okrem tých vo vrcholoch). Týchto 7 kríkov spolu s tými vo vrcholoch delí príslušné strany na 8 rovnakých dielov. Teda tieto strany naozaj merajú $8 \cdot 6$ čiže 48 metrov.



- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- autori za SK MO: Monika Dillingerová, Iveta Jančígová, Daniela Kovalčíková, Marián Macko
- recenzenti: Iveta Jančígová, Stanislav Krajčí, Erika Novotná
- preklad: Erika Novotná