MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh domácej prípravy kategórie Z7

1 Koľko štvorciferných čísel má tú vlastnosť, že ich tretina, polovica, dvojnásobok a trojnásobok sú tiež štvorciferné čísla?

(Marián Macko)

Riešenie:

Štvorciferné číslo musí byť v rozsahu

- od 3000 do 9999, aby jeho tretina bola štvorciferné číslo,
- od 2000 do 9998, aby jeho polovica bola štvorciferné číslo,
- od 1000 do 4999, aby jeho dvojnásobok bol štvorciferné číslo,
- od 1000 do 3333, aby jeho trojnásobok bol štvorciferné číslo.

Z prvých dvoch podmienok vyplýva, že číslo musí byť deliteľné 2 a 3, teda 6. Spoločne s ostatnými podmienkami dostávame, že číslo musí byť v rozsahu od 3000 do 3333.

Násobky čísla 6 v rozsahu od 3000 do 3333 sú

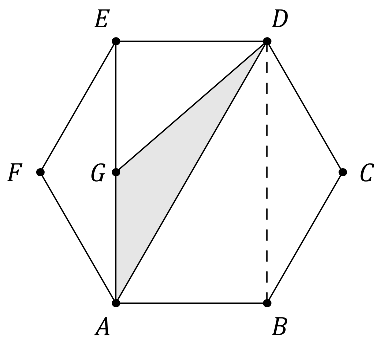
$$500 \cdot 6, \quad 501 \cdot 6, \quad \ldots, \quad 555 \cdot 6,$$

je ich teda 56.

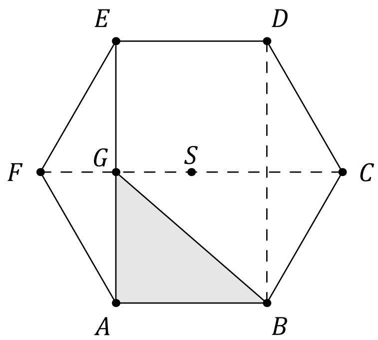
2 V pravidelnom šesťuholníku $ABCDEF$ je bod G stred uhlopriečky AE.
Určte pomer obsahov trojuholníka ADG a šesťuholníka $ABCDEF$.

(Eva Semerádová)

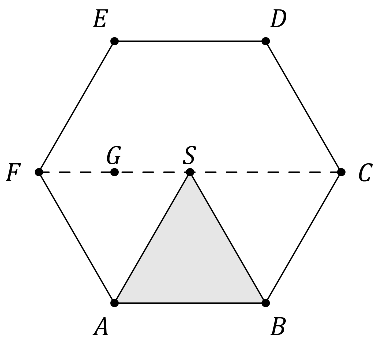
Riešenie:



Keďže $ABCDEF$ je pravidelný šesťuholník, uhlopriečky AE a BD sú rovnobežné. Trojuholníky AGD a AGB majú preto rovnaké výšky na spoločnú základňu AE, takže majú aj rovnaký obsah.



Bod G je stred uhlopriečky AE, teda leží aj na uhlopriečke CF. Keďže $ABCDEF$ je pravidelný šesťuholník, uhlopriečka CF a strana AB sú rovnobežné. Trojuholníky ABG a ABS majú preto rovnaké výšky na spoločnú základňu AB, takže majú aj rovnaký obsah.



Trojuholník ADG má teda rovnaký obsah ako trojuholník ABS. Pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ sa skladá zo 6 trojuholníkov zhodných s trojuholníkom ABS, pomer obsahov trojuholníka ADG a šesťuholníka $ABCDEF$ je preto $1 : 6$.

---

3 Páni Komický, Elegantný a Vážny sa poznajú z golfu. Jeden sa volá Karol, jeden Erik a jeden Viktor. Jeden nosí kravatu krémovej farby, jeden ebenovej farby a jeden vínovej farby.

- Výherca posledného zápasu nosí kravatu ebenovej farby.
- Pán Elegantný nebol nikdy na návšteve u pána Komického.
- Viktor nosí krémovú kravatu.
- Pánovi Komickému pripadá vtipné, že nikdy nevyhral.
- Karol bol po poslednom stretnutí na návšteve u pána Komického.
- Pán Vážny nosí kravatu vínovej farby.

Zistite, aké je vlastné meno každého z pánov a kto nosí akú kravatu.

(Erika Novotná)

Riešenie:

Rozlišujeme tri znaky, pri každom máme tri možnosti. Vzťahy zo zadania budeme postupne dopĺňať do tabuľky. Z poslednej informácie vieme nasledujúce:

priezvisko	Komický	Elegantný	Vážny
meno			
kravata			vínová

Z prvej a štvrtej informácie vyplýva, že pán Komický nenosí ebenovú kravatu. Z predchádzajúceho vieme, že vínovú kravatu nosí pán Vážny, teda kravata pána Komického je krémová. Ebenová kravata zostáva pre pána Elegantného:

priezvisko	Komický	Elegantný	Vážny
meno			
kravata	krémová	ebenová	vínová

Z tretej informácie a predchádzajúceho doplnenia vyplýva, že pán Komický je Viktor. Z druhej a piatej informácie vyplýva, že pán Elegantný nie je Karol. Teda pán Elegantný je Erik a pán Vážny je Karol.

Výsledné priradenie vyzerá takto:

priezvisko	Komický	Elegantný	Vážny
meno	Viktor	Erik	Karol
kravata	krémová	ebenová	vínová

---

4 Adela, Beáta, Šárka a Julka si natrhali čerešne. Beáta ich mala 5-krát viac ako Adela, Šárka mala o 15 čerešní viac ako Beáta, Julka mala o 200 viac ako Adela.

Najmenej o koľko sa mohli líšiť počty čerešní Šárky a Julky? A koľko čerešní by v takom prípade malo každé z dievčat?

(Karel Pazourek)

Riešenie:

Počty čerešní Adely, Beáty, Šárky a Julky označíme postupne a, b, s, j. Podľa zadania platí

$$b = 5a,$$

$$s = b + 15,$$

$$j = a + 200.$$

Potom

$$|j - s| = \big|(a + 200) - (b + 15)\big| = |185 + a - b| = |185 + a - 5a| = |185 - 4a|\,.$$

Táto hodnota je nenulová, keďže 185 nie je násobkom 4. Najbližší násobok 4 k číslu 185 je 184 čiže $4 \cdot 46$. Vtedy $a = 46$, z čoho

$$j = 46 + 200 = 246$$

a

$$b = 5 \cdot 46 = 230,$$

a potom

$$s = 230 + 15 = 245.$$

Počty čerešní Šárky a Julky sa líšili aspoň o 1 čerešňu. V takom prípade mala Adela 46, Beáta 230, Šárka 245 a Julka 246 čerešní. Tieto počty pritom vyhovujú zadaniu.

---

5 Václav mal niekoľko bielych kociek. Na každej kocke zafarbil tri rôzne steny troma rôznymi farbami, a to červenou, zelenou a modrou. Potom roztriedil kocky do skupín podľa typu zafarbenia tak, že do každej skupiny dal všetky kocky, ktoré vyzerali po vhodnom otočení rovnako.

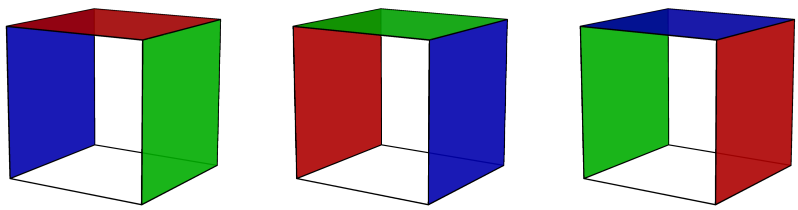
Najviac koľko skupín mohol Václav vytvoriť?

(Iveta Jančigová)

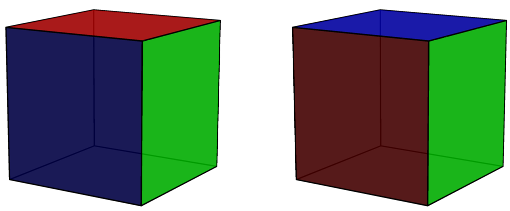
Riešenie 1:

Tri vybrané steny možno tromi farbami ofarbiť celkovo šiestimi spôsobmi. Podľa vzájomnej polohy ofarbených stien na kocke rozlišujeme dva prípady:

- Ofarbené steny nemajú spoločný vrchol, t. j. po rozvinutí tvoria pás. V tomto prípade sú skupiny 3 a sú určené farbou prostrednej steny:



- Ofarbené steny majú spoločný vrchol, t. j. každá susedí s každou. V tomto prípade sú skupiny 2:



Václav teda mohol vytvoriť najviac 3 + 2 čiže 5 skupín.

Riešenie 2:

Každá takáto kocka sa dá natočiť tak, že dolná stena je červená. Rozoberme prípady:

- Nech je zelená stena oproti červenej.
  Potom každá takáto kocka sa dá natočiť tak, že predná stena je modrá.
  Takáto skupina kociek je teda 1.
- Nech zelená stena susedí s červenou.
  Potom každá takáto kocka sa dá natočiť tak, že predná stena je zelená.
  Potom modrá môže byť ľubovoľná zo zvyšných 4 stien, takže takýchto skupín kociek je 4.

Celkový počet skupín všetkých takýchto kociek je teda 1 + 4 čiže 5.

Václav tak mohol vytvoriť najviac 5 skupín.

---

6 Pre štvoruholník $ABCD$ platí:

- strana AD a uhlopriečka BD sú rovnako dlhé,

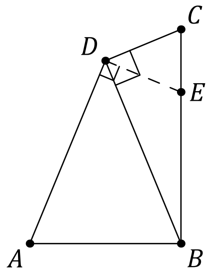
- uhlopriečka BD a strana DC sú kolmé,
- strany AB a BC sú kolmé,
- os uhla BDC a strana AD sú kolmé.

Určte veľkosť uhla BCD.

(Marián Macko)

Riešenie 1:

Priesečník osi uhla BDC so stranou BC označíme E:



Priamka DE je os pravého uhla BDC, teda uhly BDE a EDC sú zhodné a majú veľkosť 45°. Uhol ADC je súčet uhlov ADE a EDC a uhol ADE je pravý. Teda veľkosť uhla ADC je $90° + 45°$ čiže 135°.

Uhol ADE je súčet uhlov ADB a BDE. Uhol ADE je pravý a uhol BDE má veľkosť 45°, teda uhol ADB má tiež veľkosť 45°. Trojuholník ABD je rovnoramenný, takže uhly BAD a ABD pri základni sú zhodné. Súčet vnútorných uhlov trojuholníka ABD je 180°, teda veľkosť uhla BAD je $\frac{1}{2}(180° - 45°)$ čiže 67,5°.

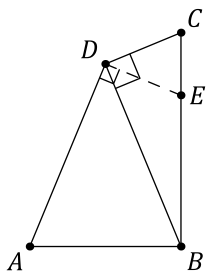
Súčet vnútorných uhlov štvoruholníka $ABCD$ je 360°, teda veľkosť uhla BCD je $360° - 135° - 90° - 67{,}5°$ čiže 67,5°.

Poznámka:

Veľkosť uhla BCD možno dopočítať v rámci trojuholníka BCD: Uhol BDC je pravý a uhol DBC je rozdiel pravého uhla ABC a uhla ABD, ktorého veľkosť poznáme z predchádzajúceho.

Riešenie 2:

Nech E je priesečník osi strany BC a osi uhla BDC.



Keďže úsečky v dvojiciach (DA, DE), (DB, DC), (AB, EC) sú navzájom kolmé, trojuholníky ADB a EDC sú podobné a ich uhly ADB a EDC sú zhodné, a keďže ADB je rovnoramenný s hlavným vrcholom D, aj EDC je rovnoramenný s hlavným vrcholom D.

Keďže DE je os uhla BDC, platí

$$|\sphericalangle EDC| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle BDC| = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°,$$

takže

$$|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle ECD| = \frac{1}{2} \cdot 2\,|\sphericalangle ECD| = \frac{1}{2}(|\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle CED|)$$

$$= \frac{1}{2}(180° - |\sphericalangle EDC|) = 90° - \frac{1}{2}\,|\sphericalangle EDC| = 90° - \frac{1}{2} \cdot 45° = 90° - 22{,}5° = 67{,}5°.$$

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- autori za SK MO: Iveta Jančigová, Marián Macko, Erika Novotná
- recenzenti: Iveta Jančigová, Stanislav Krajči, Erika Novotná
- preklad: Erika Novotná