

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh domácej prípravy kategórie Z8

1 Nájdiť všetky trojice navzájom rôznych prvočísel (p, q, r) , pre ktoré platí

$$(p - q) \cdot (r - q) = 195.$$

(Erika Novotná)

Riešenie:

Súčin čísel $p - q$ a $r - q$ má byť nepárne číslo 195. Teda každé z čísel $p - q$ a $r - q$ musí byť nepárne. Rozdiel dvoch celých čísel je nepárny práve vtedy, keď jedno z čísel je nepárne a druhé párne. Prvočísla p, q, r majú byť navzájom rôzne a jediné párne prvočíslo je 2. Teda $q = 2$, a potom dostávame:

$$(p - 2) \cdot (r - 2) = 195.$$

Všetky dvojice čísel $(p - 2, r - 2)$ so súčinom 195, pričom prvé zložky sú bez ujmy na všeobecnosti menšie, sú

$$(1, 195), (3, 65), (5, 39), (13, 15),$$

čomu zodpovedajú dvojice (p, r)

$$(3, 197), (5, 67), (7, 41), (15, 17).$$

Prvé tri dvojice tvoria prvočísla, štvrtú nie.

Všetky vyhovujúce trojice prvočísel (p, q, r) sú teda

$$(3, 2, 197), (5, 2, 67), (7, 2, 41), (41, 2, 7), (67, 2, 5), (197, 2, 3).$$

2 Pre rovnobežníky $ABCD$ a $KLMN$ platí:

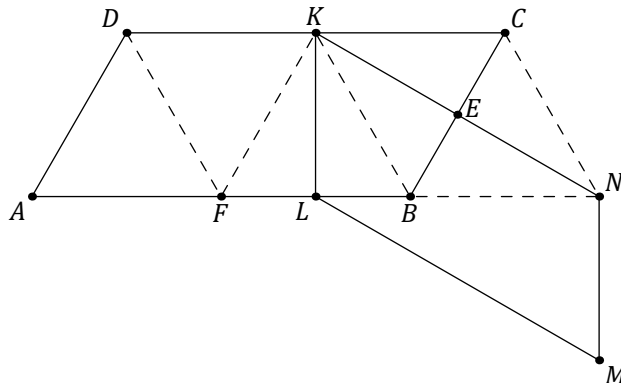
- bod K je stred úsečky CD ,
- bod K je priesečník priamky CD s osou úsečky BC ,
- bod L je priesečník priamky AB s osou úsečky CD ,
- bod N je priesečník priamky AB s osou úsečky BC ,
- uhol BAD má veľkosť 60° .

Určte pomer obsahov rovnobežníkov $ABCD$ a $KLMN$.

(Marián Macko)

Riešenie:

Nech E je stred úsečky BC a F stred úsečky AB :



Body F a K sú stredy protíhlých strán rovnobežníka $ABCD$, takže ten sa skladá z dvoch zhodných rovnobežníkov $AFKD$ a $FBCK$.

Úsečky FD a BK sú uhlopriečkami rovnobežníkov $AFKD$ a $FBCK$, takže rovnobežník $ABCD$ sa skladá zo štyroch navzájom zhodných trojuholníkov AFD , KDF , FBK , CKB .

Bod K leží na osi úsečky BC , teda úsečky BK a CK sú zhodné a trojuholník BCK je rovnoramenný. Protiľahlé uhly BAD a BCD v rovnobežníku $ABCD$ sú zhodné, takže majú veľkosť 60° . Odtiaľ vyplýva, že trojuholník BCK je rovnostranný. Rovnobežník $ABCD$ sa teda skladá zo štyroch rovnostranných trojuholníkov zhodných s trojuholníkom BCK .

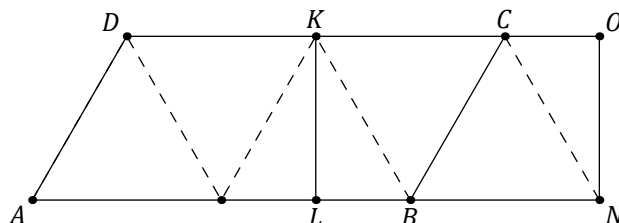
Priamy uhol FBN je súčet uhlov FBK , KBC , CBN , z ktorých prvé dva majú veľkosť 60° , teda uhol CBN má tiež veľkosť 60° . Trojuholníky BEK , BLK , BEN sú všetky pravouhlé a majú zhodné uhly pri vrchole B . Navyše prvý s druhým má spoločnú stranu BK a prvý s tretím má spoločnú stranu BE . Teda tieto tri trojuholníky sú podľa vety *usu* navzájom zhodné.

Celkovo sa rovnobežník $ABCD$ skladá z ôsmich trojuholníkov zhodných s trojuholníkom BEK . Trojuholník KLN sa skladá z troch trojuholníkov zhodných s tým istým trojuholníkom, teda rovnobežník $KLMN$ sa skladá zo 6 trojuholníkov zhodných s trojuholníkom BEK .

Pomer obsahov rovnobežníkov $ABCD$ a $KLMN$ je $8 : 6$ čiže $4 : 3$.

Poznámka:

Rovnobežník $KLMN$ má rovnaký obsah ako obdĺžnik $KLNO$, kde bod O je priesečníkom priamok MN a CD . Rovnobežníky $ABCD$ a $KLNO$ majú spoločnú výšku KL a pomer dĺžok príslušných strán AB a LN je $2 : 1,5$ čiže $4 : 3$. Pomer ich obsahov je rovnaký.



- 3 Tomáš zbiera pohľadnice z Islandu, Anglicka a Nórska. Z každej krajiny má aspoň jednu pohľadnicu, celkovo ich má 40. Pohľadníc z Anglicka má viac ako pohľadníc z Nórska. Pohľadníc z Islandu má viac ako 5-násobok a menej ako 6-násobok počtu pohľadníc z Anglicka.

Z ktorých krajín sú pohľadnice, ktorých počet v Tomášovej zbierke je možné určiť jednoznačne?

(Erika Novotná)

Riešenie 1:

Počty pohľadníc z jednotlivých krajín označíme ich začiatočnými písmenami. Postupne vzhľadom na a odvodíme rozmedzie pre n , a to $0 < n < a$, a pre i , a to $5a < i < 6a$, a overíme, či pre nejaké a , n , i platí zostávajúca podmienka, a to $a + n + i = 40$:

- Ak $a < 6$, tak $n < 5$ a $i < 30$. Potom však $a + n + i \leq 5 + 4 + 29 = 38 < 40$, čo je spor. Tento prípad teda nenastáva.
- Ak $a = 6$, tak $n \in \{1, \dots, 5\}$ a $i \in \{31, \dots, 35\}$. Potom $a + n + i = 40$ v troch prípadoch, a to keď (n, i) je $(1, 33)$, $(2, 32)$, $(3, 31)$.
- Ak $a > 6$, tak $i > 35$, Potom však $a + n + i \geq 7 + 1 + 36 = 44 > 40$, čo je spor. Tento prípad teda nenastáva.

Pohľadníc z Anglicka teda bolo určite 6, avšak počty ostatných nie sú jednoznačné.

Riešenie 2:

Počty pohľadníc z jednotlivých krajín označíme ich začiatočnými písmenami.

Podľa zadania

$$a + n + i = 40,$$

$$0 < n < a,$$

$$5a < i < 6a.$$

Z poslednej podmienky vyplýva, že i je v rozmedzí $5a + 1$ až $6a - 1$.

Odtiaľ a z prvej podmienky vyplýva, že $n = 40 - a - i$ je v rozmedzí od $39 - 6a$ do $41 - 7a$.

Z podmienky $0 < n$ vyplýva, že $a < 7$. Z podmienky $n < a$ vyplýva, že $a > 5$. Celkovo teda $a = 6$ a možné dvojice (n, i) sú $(1, 33)$, $(2, 32)$, $(3, 31)$.

Počet pohľadníc teda možno jednoznačne určiť iba pre Anglicko.

- 4 Žiaci získali v prvej písomke priemerne 84 bodov. Tí istí žiaci napísali druhú písomku s priemerným ziskom 70 bodov. Štyria z týchto žiakov mali v oboch písomkách po 63 bodov. Priemerný zisk ostatných žiakov v druhej písomke bol 72 bodov.

Určte priemerný počet bodov ostatných žiakov v prvej písomke.

(Iveta Jančígová)

Riešenie:

Súčet bodov, ktoré podpriemerným žiakom chýbali do celkového priemeru, zodpovedá súčtu bodov, o ktoré nadpriemerní žiaci tento priemer prevyšovali.

V druhej písomke mali štyria žiaci každý o 7 bodov menej, ako bol priemer, čo je spolu 28 bodov. V tej istej písomke mali ostatní žiaci priemerne o 2 body viac, ako bol priemer. Teda ostatných žiakov bolo 14, lebo $4 \cdot 7 = 14 \cdot 2$, a všetkých žiakov bolo $14 + 4$ čiže 18.

V prvej písomke bol celkový priemer všetkých žiakov 84 bodov, čo je spolu $18 \cdot 84$ čiže 1512 bodov. Štyria podpriemerní žiaci mali spolu $4 \cdot 63$ čiže 252 bodov. Ostatných 14 žiakov malo spolu $1512 - 252$ čiže 1260 bodov, teda priemerne $1260/14$ čiže 90 bodov.

Poznámka:

Ak označíme počet všetkých žiakov n , tak súčet bodov v prvej písomke bol $84n$ a v druhej $70n$ bodov. Priemerné hodnotenie ostatných žiakov v druhej písomke bolo 72 bodov, takže

$$\frac{70n - 252}{n - 4} = 72,$$

čo po úpravách dáva $n = 18$. Priemerné hodnotenie ostatných žiakov v prvej písomke bolo $(84n - 252)/(n - 4)$, čo je $1260/14$ čiže 90 bodov.

- 5 Je daná kružnica k so stredom S a polomerom 6 cm a priamka p prechádzajúca bodom S . Zostrojte obdĺžnik $ABCD$ tak, aby platilo:

- vrcholy A a B ležia na priamke p ,
- kružnica k sa dotýka strany CD ,
- kružnica k pretína stranu AD v bode K a stranu BC v bode L ,
- $|AK| = |CL| = 1,5$ cm.

(Michaela Petrová)

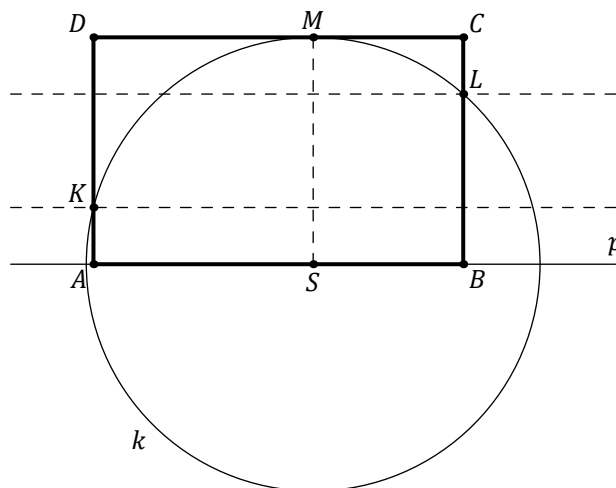
Riešenie:

Nech M je priesečník k a kolmice na p cez S . Nech $ABCD$ je vyhovujúci obdĺžnik a K a L sú príslušné body. Bod M je teda dotykový bod k a úsečky CD .

Keďže priamka AD čiže AK je kolmá na AB čiže p , bod K je od priamky p vzdialený $|AK|$, t. j. 1,5 cm. Leží teda na rovnobežke s p , ktorá je od nej vzdialená 1,5 cm a leží v polrovine pD .

Keďže priamka BC čiže BL je kolmá na AB čiže p , bod L je od priamky p vzdialený $|BL|$, čo je $|BC| - |CL|$, t. j. $6 \text{ cm} - 1,5 \text{ cm}$ čiže 4,5 cm. Leží teda na rovnobežke s p , ktorá je od nej vzdialená 4,5 cm a leží v polrovine pC čiže tiež pD .

Keďže M leží v jej vnútri úsečky CD , body K a L ležia v opačných polrovinách určených priamkou SM .



Z toho vyplýva konštrukcia:

- 1 Nech K je priesečník kružnice k a rovnobežky s p od nej vzdialenej 1,5 cm.
- 2 Nech L je priesečník kružnice k a rovnobežky s p od nej vzdialenej 4,5 cm, pričom L leží v polrovine ABK a v polrovine opačnej k SMA .
- 3 Nech A a B sú päty kolmíc z bodov K a L na priamku P .
- 4 Nech C a D sú body také, že úsečka DC je obraz úsečky AB v posunutí, ktoré zobrazí S do M .

Potom je $ABCD$ obdĺžnik, priamka CD je dotyčnica kružnice k v bode M a tento bod M leží vnútri úsečky CD .

Rovnobežky s p od nej vzdialenej 1,5 cm sú dve, a keďže $1,5 \text{ cm} < 6 \text{ cm}$, na každej z nich ležia 2 priesečníky s k . Vyhovujúce body K sú teda 4, a keďže zvyšok konštrukcie je už jednoznačný, úloha má 4 riešenia.

- 6 Jonáš a Michal zostavili každý svoj 8-boký ihlan s 9 rôznymi číslami na jeho rôznych stenách. Všetky čísla boli väčšie ako 10 a menšie ako 30. Pre každý vrchol ihlana platilo, že súčet čísel na všetkých stenách obsahujúcich tento vrchol bol násobkom čísla 4, pritom žiadne číslo násobkom čísla 4 nebolo. Jonáš tvrdil, že na dvoch stenách má čísla 14 a 15. Michal tvrdil, že na dvoch stenách má čísla 14 a 17.

Mohli obidvaja chlapci hovoriť pravdu?

(Karel Pazourek)

Riešenie:

Hlavný vrchol ihlana patrí všetkým 8 bočným stenám, ostatných 8 vrcholov patrí podstave a 2 ďalším stenám. Skúsme nájsť možné očíslovanie stien Jonášovho ihlana:

Uvažujme čísla 14 a 15 na dvoch susedných bočných stenách ihlana. Aby súčet týchto čísel s číslom na podstave bol deliteľný 4, musí číslo na podstave dávať po delení 4 zvyšok 3. Najmenšie nepoužité číslo s touto vlastnosťou v danom rozmedzí je 11.

Uvažujme číslo 11 na podstave a hľadáme číslo na bočnej stene susediacej so stenou s číslom 15. Aby súčet týchto troch čísel bol deliteľný 4, musí hľadané číslo dávať po delení 4 zvyšok 2. Najmenšie nepoužité číslo s touto vlastnosťou v danom rozmedzí je 18.

Týmto spôsobom postupne nájdeme možné čísla na 8 bočných stenách:

14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27.

Súčet týchto 8 čísel je 164, čo je číslo deliteľné 4. Teda Jonáš mohol mať ihlan so všetkými vlastnosťami zo zadania.

Obdobne možno nájsť možné očíslovanie stien Michalovho ihlana: Na podstave môže byť číslo 13 a na bočných stenách čísla

14, 17, 18, 21, 22, 25, 26, 29.

Teda aj Michal mohol mať ihlan so všetkými vlastnosťami zo zadania.

Obidvaja chlapci mohli hovoriť pravdu.

Poznámka:

Ukážeme, ako vyzerajú všetky vyhovujúce ihlany:

Číslo na základni označme a a čísla na bočných stenách postupne $b_1, \dots, b_8$. Každé z týchto čísel je od 11 do 29. Žiadne z nich nie je deliteľné 4, avšak každé z čísel $a + b_1 + b_2, \dots, a + b_7 + b_8, a + b_8 + b_1$ je deliteľné 4.

To teda znamená, že číslo $(a + b_1 + b_2) - (a + b_2 + b_3)$ čiže $b_1 - b_3$ je deliteľné 4, a teda b_1 a b_3 majú rovnaké zvyšky po delení 4. Analogicky majú rovnaké zvyšky po delení 4 aj dvojice b_3 a b_5 , b_5 a b_7 , takže všetky štyri čísla b_1, b_3, b_5, b_7 majú rovnaké zvyšky po delení 4. Analogicky majú rovnaké zvyšky po delení 4 čísla b_2, b_4, b_6, b_8 . Keďže žiadne z týchto čísel nie je deliteľné 4, každá z týchto štvoriek je teda celá v jednej z týchto skupín:

- zvyšok 1: 13, 17, 21, 25, 29,
- zvyšok 2: 14, 18, 22, 26,
- zvyšok 3: 11, 15, 19, 23, 27.

Na bočných stenách sa teda pravidelne striedajú čísla z práve dvoch z týchto skupín.

Rozoberme prípady:

- Nech sú na bočných stenách použité čísla z prvej a druhej skupiny.

Pri každom vrchole podstavy má súčet čísel na príslušných dvoch stenách po delení 4 zvyšok $(1 + 2) \bmod 4$ čiže 3, takže na podstave je číslo so zvyškom 1, a teda z prvej skupiny.

Bez ujmy na všeobecnosti nech $b_1 \bmod 4 = 2$ a $b_2 \bmod 4 = 1$. Keďže číslo $(a + b_1 + b_2) \bmod 4 = 0$, platí $a \bmod 4 = 1$. Michalove čísla sú teda práve všetky čísla z prvej a tretej skupiny, pričom zvyšky čísel na

bočných stenách po delení 4 sú striedavo 2 a 1. Všetky súčty čísel pri vrchoch základne tak majú po delení 4 zvyšok $(1 + 2 + 1) \bmod 4$ čiže 0, sú teda deliteľné 4. Platí tiež

$$(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8) \bmod 4 = (2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1 + 2 + 1) \bmod 4 = 12 \bmod 4 = 0,$$

takže aj súčet čísel pri hlavnom vrchole je deliteľný 4.

- Nech sú na bočných stenách použité čísla z prvej a tretej skupiny.

Pri každom vrchole podstavy má súčet čísel na príslušných dvoch stenách po delení 4 zvyšok $(1 + 3) \bmod 4$ čiže 0, takže na podstave je číslo so zvyškom 0, čo je spor.

Tento prípad teda nenastáva.

- Nech sú na bočných stenách použité čísla z druhej a tretej skupiny.

Pri každom vrchole podstavy má súčet čísel na príslušných dvoch stenách po delení 4 zvyšok $(2 + 3) \bmod 4$ čiže 1, takže na podstave je číslo so zvyškom 3, a teda z tretej skupiny.

Bez ujmy na všeobecnosti nech $b_1 \bmod 4 = 2$ a $b_2 \bmod 4 = 3$. Keďže číslo $(a + b_1 + b_2) \bmod 4 = 0$, platí $a \bmod 4 = 3$. Jonášove čísla sú teda práve všetky čísla z prvej a tretej skupiny, pričom zvyšky čísel na bočných stenách po delení 4 sú striedavo 2 a 3. Všetky súčty čísel pri vrchoch základne tak majú po delení 4 zvyšok $(3 + 2 + 3) \bmod 4$ čiže 0, sú teda deliteľné 4. Platí tiež

$$(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8) \bmod 4 = (2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 3) \bmod 4 = 20 \bmod 4 = 0,$$

takže aj súčet čísel pri hlavnom vrchole je deliteľný 4.

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - autori za SK MO: Iveta Jančígová, Marián Macko, Erika Novotná
 - recenzenti: Iveta Jančígová, Stanislav Krajči, Erika Novotná
 - preklad: Erika Novotná