MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Zadania úloh 1. časti celoštátneho kola kategórie A

(verzia v maďarčine)

1 Az x, y, z pozitív valós számokra teljesül, hogy $x^2 + y^2 + z^2 = 75$ és hogy az $x + y$, $y + z$, $z + x$ kifejezések közül kettőnek legalább 10 az értéke. Határozzátok meg a harmadik kifejezés lehető legkisebb illetve legnagyobb értékét.

2 Adott az ABC hegyesszögű háromszög, melynek a súlypontja T. Legyen P az ABC háromszög köréírt körének rövidebbik BC ívének egy pontja és legyen Q a P-ből a BC szakaszra bocsátott merőleges talppontja. Legyen X a QT és az A ponton áthaladó BC-vel párhuzamos egyenes metszéspontja. Legyen S a PX szakasz felezőpontja. Bizonyítsátok be, hogy $|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle SAC|$.

3 Azt mondjuk, hogy emberek egy csoportja *háromismeretséges*, ha a csoport minden tagja pontosan három másik csoporttagot ismer és a csoportot nem lehet úgy felosztani két nemüres részre, hogy mindenkinek az összes ismerőse vele azonos csoportban legyen. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Határozzátok meg a legnagyobb olyan k-t, hogy $k \geq 3$ és létezik olyan n, hogy minden háromismertséges csoportból, amiben legalább n ember van, kiválasztható és egy kör alakú asztal köré leültethető legalább k ember a csoportból úgy, hogy az asztalszomszédok ismerjék egymást.

A Matematika Olimpiász A kategória országos fordulójának első versenynapja **2026. március 16-án, hétfőn 8:30** és **13:00** között kerül lebonyolításra. A versenyzőknek 4,5 óra tiszta idő áll rendelkezésére a feladatok megoldására.

Minden feladat megoldása 7 pontot ér.
A verseny folyamán nem megengedett számologépek, egyéb elektronikus eszközök és írott anyagok használata.

- Kiadták: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- A feladatokat az SK MO nevében kitűzte: Jozef Rajník
- Lektorálták: Stanislav Krajči, Peter Novotný
- Fordította: Záhorský Ákos

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Zadania úloh 2. časti celoštátneho kola kategórie A

(verzia v maďarčine)

4 Legyenek a és b különböző nemnulla természetes számok úgy, hogy $a^2 + 1$-t és $ab + 1$-t pontosan ugyanazok a prímszámok osztják. Bizonyítsátok be, hogy az $a^2 + b^2 + 2$ szám osztható egy prímszám négyzetével.

5 Legyen $\{a_1, a_2, \dots, a_{2026}\} = \{1, 2, \dots, 2026\}$ és minden természetes i számra $a_{i+2026} = a_i$ teljesül. Határozzátok meg a legkisebb és legnagyobb lehetséges értékét az olyan $\{1, 2, \dots, 2026\}$ halmazbeli i indexek számának, hogy az adott i-re az alábbi 2026 szám mindegyike nemnegatív:

$$\begin{gathered}
a_i, \\
a_i - a_{i+1}, \\
a_i - a_{i+1} + a_{i+2}, \\
a_i - a_{i+1} + a_{i+2} - a_{i+3}, \\
\vdots \\
a_i - a_{i+1} + \dots - a_{i+2023} + a_{i+2024}, \\
a_i - a_{i+1} + \dots - a_{i+2023} + a_{i+2024} - a_{i+2025}.
\end{gathered}$$

6 Legyen $ABCDEF$ egy O középpontú körbe írt olyan hatszög, melynek átellenes oldalpárjai párhuzamosak. Az AB, CD, EF egyenesek Δ_1 háromszög oldalegyenesei és a BC, DE, FA egyenesek Δ_2 háromszög oldalegyenesei. Bizonyítsátok be, hogy a Δ_1 és Δ_2 háromszögek köré írt körök középpontjai egymás képei az O-n keresztüli középpontos tükrözésnél.

A Matematika Olimpiász A kategória országos fordulójának második versenynapja **2026. március 17-én, kedden 8:30** és **13:00** között kerül lebonyolításra. A versenyzőknek 4,5 óra tiszta idő áll rendelkezésére a feladatok megoldására.

Minden feladat megoldása 7 pontot ér.
A verseny folyamán nem megengedett számológépek, egyéb elektronikus eszközök és írott anyagok használata.

- Kiadták: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- A feladatokat az SK MO nevében kitűzte: Jozef Rajník
- Lektorálták: Stanislav Krajči, Peter Novotný
- Fordította: Záhorský Ákos