

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh krajského kola kategórie Z9

- 1 Prirodzené číslo nazveme *vlnité*, ak je zapísané práve dvoma rôznymi ciframi, ktoré sa striedajú. (Např. čísla 4343 a 43434 sú vlnité, zatiaľ čo čísla 4334, 4433 a 43134 nie sú vlnité.)

Určte všetky dvojice päťciferných vlnitých čísel takých, že ich súčet je 64645, ich rozdiel je vlnité číslo a v zápisoch oboch čísel a ich rozdielu je použitých šesť navzájom rôznych cifier.

(Monika Dillingerová)

Riešenie:

Zadanie môžeme vyjadriť pomocou algebrogramov s navzájom odlišnými ciframi a, b, c, d, e, f :

$$\begin{array}{r} a \ b \ a \ b \ a \\ + \ c \ d \ c \ d \ c \\ \hline 6 \ 4 \ 6 \ 4 \ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a \ b \ a \ b \ a \\ - \ c \ d \ c \ d \ c \\ \hline (e) \ f \ e \ f \ e \end{array}$$

Hľadané čísla sú päťciferné, teda ich prvé cifry a a c sú nenulové. Rozdiel týchto čísel je kladný, takže $a \geq c$, a keďže sú rôzne, platí $a > c$, a teda aj cifra e je nenulová. Výsledkom rozdielu je vlnité číslo, teda pri odčítaní nedochádza k prechodom cez desiatku – ak by to tak bolo, líšili by sa číslice na miestach jednotiek a stoviek. Preto je rozdiel päťciferné číslo a platí $b > d$. Súčet je päťciferné číslo, teda pri sčítaní cifier a a c nedochádza k prechodu cez desiatku. Cifry na miestach jednotiek a stoviek sa líšia, teda pri sčítaní cifier b a d k prechodu cez desiatku dochádza. Zo zápisu teda vyplýva $a + c = 5$ a $b + d = 14$.

Celkovo dostávame nasledujúce dvojice cifier (a, c) a (b, d) vyhovujúce uvedeným podmienkam, pre každú dvojicu vypočítame ich rozdiel:

a	4	3
c	1	2
e	3	1

b	9	8
d	5	6
f	4	2

Aby v zápisoch hľadaných čísel a ich rozdielu boli navzájom rôzne cifry, je možné kombinovať buď prvý stĺpec z prvej tabuľky s druhým stĺpcom z druhej, alebo naopak. Všetky (neusporiadané) dvojice vyhovujúcich čísel teda sú (48484, 16161) a (39393, 25252).

Hodnotenie:

- 2 body za vhodný zápis a formuláciu vzťahov medzi ciframi;
- po 1 bode za každú vyhovujúcu dvojicu čísel;
- 2 body za úplnosť rozboru možností a kvalitu komentára.

- 2 Je daný rovnobežník $ABCD$ a bod E tak, že platí:

- dĺžka strany AD je 17 cm,
- bod E je priesečníkom polpriamky CB a kolmice na priamku AB prechádzajúcej bodom D ,
- dĺžka úsečky DE je 24 cm,
- obsahy rovnobežníka $ABCD$ a trojuholníka ABE sú rovnaké.

Vypočítajte dĺžku strany AB .

(Marián Macko)

Riešenie:

Z druhej podmienky vyplýva, že body D a E ležia v opačných polorovinách určených priamkou AB . Priesečník úsečiek AB a DE označíme P .

Keďže $ABCD$ je rovnobežník, priamky BC a AD sú rovnobežné. Bod E leží na polopriamke CB , preto aj priamky BE a AD sú rovnobežné. Odtiaľ vyplýva, že trojuholníky APD a BPE sú podobné (např. na základe striedavých uhlov pri zodpovedajúcich vrcholoch).

Rovnobežník $ABCD$ a trojuholník ABE majú rovnaký obsah a spoločnú stranu AB . Preto sú dĺžky zodpovedajúcich výšok PD a PE v pomere 1 : 2 a toto je aj koeficient podobnosti trojuholníkov APD a BPE .

Dĺžka úsečky DE je 24 cm a pomer dĺžok úsečiek PD a PE je 1 : 2. Teda dĺžky týchto úsečiek sú 8 cm, resp. 16 cm.

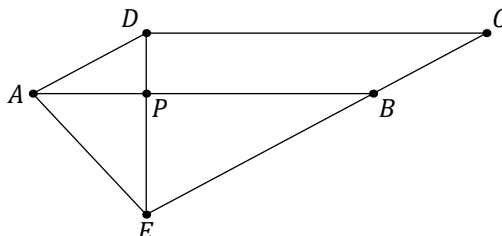
Dĺžka úsečky AD je 17 cm a trojuholník APD je pravouhlý. Podľa Pythagorovej vety platí

$$|AP|^2 = |AD|^2 - |DP|^2 = (17 \text{ cm})^2 - (8 \text{ cm})^2 = 289 \text{ cm}^2 - 64 \text{ cm}^2 = 225 \text{ cm}^2,$$

a teda $|AP| = 15 \text{ cm}$. Odtiaľ a z podobnosti trojuholníkov APD a BPE vyplýva $|PB| = 2 \cdot |AP| = 30 \text{ cm}$.

Platí teda

$$|AB| = |AP| + |PB| = 45 \text{ cm}.$$



Hodnotenie:

- 1 bod za úvahy o polohách bodov D a E vzhľadom na priamku AB , prípadne náčrt;
- 1 bod za podobnosť trojuholníkov APD a BPE ;
- 1 bod za koeficient tejto podobnosti;
- po 1 bode za dĺžky úsečiek DP , AP a AB .

- 3 Adrián, Karol a Emil majú dnes všetci traja narodeniny. Adrián je trikrát mladší ako Karol a Karol je o desať rokov mladší ako Emil. Keď bude mať Adrián toľko rokov, koľko má teraz Karol, bude jeden z tejto trojice dvakrát starší ako iný z tejto trojice.

Koľko rokov môže mať Adrián, Karol a Emil? Nájdite všetky možnosti.

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Označme súčasné veku chlapcov začiatočnými písmenami ich mien. Podľa zadania je najmladší Adrián, najstarší Emil a platí $A = 1/3 \cdot K$ a $K = E - 10$. Vyjadríme veku Karla a Emila pomocou veku Adriána:

$$K = 3A,$$

$$E = 3A + 10.$$

Adrián bude mať toľko rokov, koľko má teraz Karol, o $K - A$ čiže $2A$ rokov. Veku Adriána, Karola a Emila v tom čase označme postupne A' , K' , E' . Potom

$$A' = 3A,$$

$$K' = 5A,$$

$$E' = 5A + 10.$$

Rozoberme tri prípady:

- Karol bude dvakrát starší ako Adrián.

Platí teda

$$K' = 2A',$$

$$5A = 6A,$$

$$A = 0.$$

Potom

$$K = 3 \cdot 0 = 0$$

a

$$E = 3 \cdot 0 + 10 = 0 + 10 = 10.$$

Adrián, Karol a Emil teda majú postupne 0, 0 a 10 rokov.

Adrián je naozaj trikrát mladší ako Karol a Karol je o desať rokov mladší ako Emil. Keď bude mať Adrián toľko rokov, koľko má teraz Karol, čo je práve teraz, bude jeden z tejto trojice, a to napríklad Karol, dvakrát starší ako iný z tejto trojice, a to Adrián.

- Emil bude dvakrát starší ako Karol.

Platí teda

$$\begin{aligned} E' &= 2K', \\ 5A + 10 &= 10A, \\ 10 &= 5A, \\ A &= 2. \end{aligned}$$

Potom

$$K = 3 \cdot 2 = 6$$

a

$$E = 3 \cdot 2 + 10 = 6 + 10 = 16.$$

Adrián, Karol a Emil teda majú postupne 2, 6 a 16 rokov.

Adrián je naozaj trikrát mladší ako Karol a Karol je o desať rokov mladší ako Emil. Keď bude mať Adrián toľko rokov, koľko má teraz Karol, čo bude o 4 roky, bude jeden z tejto trojice, a to 20-ročný Emil, dvakrát starší ako iný z tejto trojice, a to 10-ročný Karol.

- Emil bude dvakrát starší ako Adrián.

Platí teda

$$\begin{aligned} E' &= 2A', \\ 5A + 10 &= 6A, \\ 10 &= A. \end{aligned}$$

Potom

$$K = 3 \cdot 10 = 30$$

a

$$E = 3 \cdot 10 + 10 = 30 + 10 = 40.$$

Adrián, Karol a Emil teda majú postupne 10, 30 a 40 rokov.

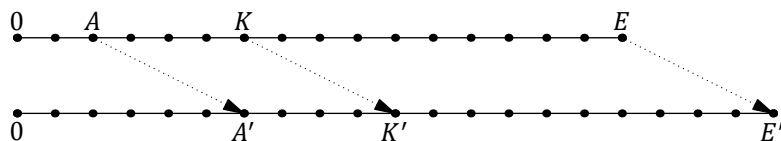
Adrián je naozaj trikrát mladší ako Karol a Karol je o desať rokov mladší ako Emil. Keď bude mať Adrián toľko rokov, koľko má teraz Karol, čo bude o 20 rokov, bude jeden z tejto trojice, a to 60-ročný Emil, dvakrát starší ako iný z tejto trojice, a to 30-ročný Adrián.

Adrián, Karol a Emil môžu mať v uvedenom poradí buď 0, 0, 10 rokov alebo 2, 6 a 16 rokov, alebo 10, 30 a 40 rokov.

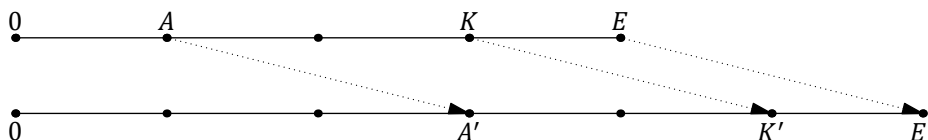
Poznámka:

Predchádzajúce úvahy pre druhý a tretí prípad je možné znázorniť nasledovne:

•



•



Hodnotenie:

- 1 bod za rozbor či znázornenie vzťahov zo zadania;
- 1 bod za uvažovanie troch možností;
- 1 bod za výsledok 2, 6 a 16;
- 1 bod za výsledok 10, 30 a 40;
- 2 body za zrozumiteľnosť úprav a kvalitu komentára.

Vzhľadom na diskutabilnosť riešenia 0, 0 a 10 tolerujte jeho neuvedenie.

- 4 Je daný štvoruholník $ABCD$, pričom bod D leží na osi úsečky BC a vzdialenosť bodu A od priamky CD je rovnaká ako vzdialenosť bodu C od priamky AD .

Dokážte, že štvoruholníku $ABCD$ sa nedá opísať kružnica.

(Karel Pazourek)

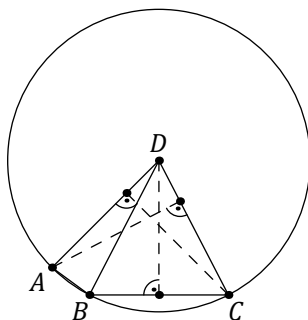
Riešenie:

Bod D leží na osi úsečky BC , teda úsečky BD a CD sú zhodné (všetky body na osi úsečky majú od jej krajných bodov rovnakú vzdialenosť).

Vzdialenosť bodu A od priamky CD zodpovedá dĺžke výšky trojuholníka ACD na stranu CD , vzdialenosť bodu C od priamky AD zodpovedá dĺžke jeho výšky na stranu AD . Tieto vzdialenosti sú rovnaké, teda úsečky AD a CD sú zhodné (obsah trojuholníka je polovica súčinu veľkosti strany a zodpovedajúcej výšky).

Dokopy dostávame, že úsečky AD , BD a CD sú navzájom zhodné, teda body A , B , C ležia na kružnici so stredom D .

Kružnica opísaná štvoruholníku $ABCD$ je kružnicou opísanou každému trojuholníku určenému tromi z jeho štyroch vrcholov. Ale kružnica opísaná trojuholníku ABC neprechádza bodom D , pretože ten je jej stred. Preto štvoruholníku $ABCD$ nemožno opísať kružnicou.



Poznámka:

Namiesto samotných kružníc sa môžeme zamerať na ich stred: Ak by sa štvoruholníku $ABCD$ dala opísať kružnica, tak by jej stred splýval so stredom kružnice opísanej každému trojuholníku určenému tromi z jeho štyroch vrcholov. Stred kružnice opísanej trojuholníku BCD leží na osi úsečky BC mimo vrcholu D , stred kružnice opísanej trojuholníku ABC je v bode D . Preto štvoruholníku $ABCD$ nemožno opísať kružnicu.

Hodnotenie:

- 1 bod za zhodnosť úsečiek BD a CD ;
- 2 body za zhodnosť úsečiek AD a CD ;
- 1 bod za poznatok, že D je stredom kružnice opísanej trojuholníku ABC ;
- 2 body za kvalitu komentára.

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - autori za SK MO: Monika Dillingerová, Marián Macko
 - recenzenti: Erika Novotná, Stanislav Krajčí
 - preklad: Erika Novotná