

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh krajského kola kategórie C

- 1 Nad každou zo štyroch úsečiek s navzájom rôznymi kladnými dĺžkami a , b , $b - a$, $a + b$ zostrojíme štvorec. Obsah najväčšieho štvorca je rovný súčtu obsahov druhého najväčšieho a tretieho najväčšieho štvorca. Najmenší štvorec má obsah 4. Určte dĺžky všetkých úsečiek.

(Jana Kopfová)

Riešenie 1:

Podľa zadania je číslo $b - a$ kladné, t. j. $b > a$, a teda platí $a + b > b > a$, čo znamená, že najkratšia úsečka má dĺžku buď $b - a$, alebo a .

Rozoberme prípady:

- Nech $b - a$ je najkratšia úsečka.

Potom podľa zadania

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + b^2, \\ a^2 + 2ab + b^2 &= a^2 + b^2, \\ 2ab &= 0,\end{aligned}$$

čo je spor.

Tento prípad teda nenastáva

- Nech a je najkratšia úsečka.

Platí teda $a + b > b > b - a > a$. Potom podľa zadania

$$\begin{aligned}a^2 &= 4, \\ a &= 2\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (b - a)^2 + b^2, \\ a^2 + 2ab + b^2 &= (b^2 - 2ab + a^2) + b^2, \\ 4ab &= b^2, \\ 4a &= b, \\ 4 \cdot 2 &= b, \\ 8 &= b.\end{aligned}$$

Z toho $a + b = 10$ a $b - a = 6$.

Dĺžky úsečiek sú teda 10, 8, 6, 2. A naozaj,

$$10^2 = 100 = 64 + 36 = 8^2 + 6^2$$

a

$$2^2 = 4.$$

Pokyny:

V neúplných riešeniach ohodnotte čiastkové kroky nasledovne:

- A1 [1 bod] Správna štvorica čísel 2, 8, 6, 10 (v ľubovoľnom poradí, aj bez zdôvodnenia či overenia). Tento bod dajte aj v prípade, že je uvedené $a = 2$, $b = 8$ a chýba výpočet $a + b$, $b - a$. Iba v prípade inak úplného riešenia vyžadujte uvedenie celej štvorice, ako to vyžaduje zadanie.
- A2 [2 body] Vylúčenie usporiadania $a + b > b > a > b - a$.
- A3 [1 bod] Prepis podmienky zo zadania do rovnosti $(a + b)^2 = b^2 + (b - a)^2$ alebo s ňou ekvivalentnej rovnosti (napr. môže už byť za a dosadené 2).
- A4 [1 bod] Správne úpravy rovnosti z kroku A4 vedúce k jasnému záveru, ako napríklad $b = 4a$.

A5 [1 bod] Overenie, že nájdená štvorica spĺňa podmienky zadania alebo zmienka o ekvivalencii úprav.

Nech a_i je počet bodov za A_i . Celkovo potom dajte $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ bodov.

- 2 Nájďte najväčšie prirodzené číslo tvorené navzájom rôznymi nenulovými ciframi také, že každá jeho vnútorná cifra delí dvojciferné číslo tvorené jej susedmi zľava doprava a delí aj dvojciferné číslo tvorené jej susedmi sprava doľava. (Napríklad 831 je také, pretože číslo 3 delí obe čísla 81 a 18.)

(Patrik Bak)

Riešenie:

Ak by nejaká vnútorná cifra bola párna, okolo nej by museli byť tiež párne cifry. Opakovaním tejto myšlienky pre ďalšie vnútorné párne cifry zistíme, že celé číslo sa potom skladá iba z párnych cifier. K dispozícii sú párne cifry 2, 4, 6, 8, z ktorých možno zostaviť najviac štvorciferné číslo. Viac ako štvorciferné vyhovujúce číslo má teda všetky vnútorné cifry nepárne.

Cifra 5 nemôže byť vnútorná, pretože vedľa nej by mohli byť iba cifry 0 alebo 5, ale zadanie cifru 0 nepripúšťa a cifra 5 sa neopakuje.

Cifra 7 tiež nemôže byť vnútorná. Pre cifry x a y okolo nej by totiž muselo platiť že 7 delí $10x + y$ aj $10y + x$. Potom delí $(10x + y) - (10y + x)$ čiže $9(x - y)$, takže delí aj $x - y$. Z toho 7 delí $(x - y) + (10x + y)$ čiže $11x$, takže delí x , a teda $x = 0$ alebo $x = 7$. Zadanie však cifru 0 nepripúšťa a cifra 7 sa neopakuje.

Vnútorné cifry môžu byť už len 1, 3, 9, takže vyhovujúce číslo je najviac päťciferné. Ak existuje, tak jeho prvá cifra je najviac 8 a druhá najviac 9. Hľadáme teda vyhovujúce číslo začínajúce dvojčíslím 89.

Číslo 9 delí z čísel 81 a 83 iba to prvé, čo dáva počiatočné trojčíslenie 891. Po nej teda nasleduje posledná vnútorná cifra 3. Aby sme splnili podmienku deliteľnosti, mohli by sme za ňu umiestniť cifru 2, 5 alebo 8. Najväčšia cifra 8 však už bola použitá, vezmíme preto druhú najväčšiu cifru 5.

Vzniknuté číslo 89135 vyhovuje, lebo 9 delí 81 aj 18, 1 delí 93 aj 39 3 delí 15 aj 51.

Pokyny:

V neúplných riešeniach ohodnotte čiastkové kroky nasledovne:

- A1 [1 bod] Nájdenie akéhokoľvek vyhovujúceho čísla (aj bez overenia, že je vyhovujúce).
- A2 [2 body] Nájdenie najväčšieho vyhovujúceho čísla 89135 (aj bez overenia, že je vyhovujúce, t. j. bez výpisu deliteľností, ktoré sú na to potrebné).
- A3 [1 bod] Pozorovanie, že ak je nejaká vnútorná cifra párna, tak je vyhovujúce číslo nanajvýš štvorciferné. Tento bod možno udeliť aj vtedy, ak riešenie aspoň dvakrát použije tvrdenie, že párna cifra nemôže byť vnútorná, ak je jedna z jej susedných cifier nepárna.
- A4 [1 bod] Zdôvodnenie, že cifra 5 nemôže byť vnútorná.
- A5 [2 body] Zdôvodnenie, že cifra 7 nemôže byť vnútorná.

Nech a_i je počet bodov za A_i . Celkovo potom dajte $\max\{a_1, a_2\} + a_3 + a_4 + a_5$ bodov.

Ak by sa stalo, že riešenie splní všetky kroky A1, A2, A3, A4, A5, a napriek tomu obsahuje medzeru v argumentácii (napr. o maximálnosti nájdeného vyhovujúceho čísla), dajte 5 bodov.

Riešenia sa môžu odvolávať na čiastkové kroky z úlohy 1 domáceho kola bez opakovania dôkazu.

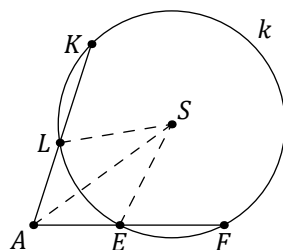
- 3 Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Nech body E, F, G, H, I, J, K, L ležia na kružnici v tomto poradí, pričom E a F ležia vnútri strany AB , G a H vnútri strany BC , I a J vnútri strany CD , K a L vnútri strany DA . Nech $|AE| = |AL|$, $|BF| = |BG|$, $|CH| = |CI|$. Dokážte, že

$$|EF| = |GH| = |IJ| = |KL|.$$

(Jaroslav Zhouf)

Riešenie 1:

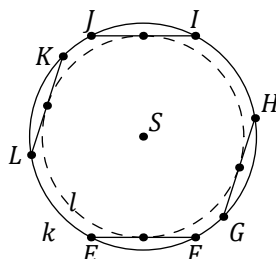
Kružnicu označme k a jej stred S . Trojuholníky ASL a ASE sú zhodné podľa vety sss, takže $\sphericalangle SAL = \sphericalangle SAE$. Priamka AS je tak nielen os súmernosti kružnice k , ale aj os súmernosti spomínanej dvojice trojuholníkov, teda aj os súmernosti priamok AL a AE . Spoločný bod AL a k , t. j. bod K , je teda súmerne združený so spoločným bodom AE a k , t. j. bodom F . Z toho vyplýva, že úsečky LK a EF sú súmerne združené podľa osi AS , a preto $|LK| = |EF|$.



Analogicky platia rovnosti $|EF| = |HG|$ a $|GH| = |JI|$.

Riešenie 2:

Kružnicu označme k a jej stred S . Rovnako ako v predchádzajúcom riešení môžeme zdôvodniť, že $|\sphericalangle SAL| = |\sphericalangle SAE|$ a analogicky $|\sphericalangle SBF| = |\sphericalangle SBG|$ a $|\sphericalangle SCH| = |\sphericalangle SCI|$. To znamená, že osi uhlov pri vrchoch A, B, C sa pretínajú v bode S . Bod S je tak rovnako vzdialený od strán štvoruholníka $ABCD$. Z toho vyplýva, že štvoruholník $ABCD$ má vpísanú kružnicu (podobne ako pri trojuholníku stačí uvažovať o jednu os uhla menej, než koľko je vrcholov) a jej stred je bod S . Označme vpísanú kružnicu l .



Kružnice k a l sú teda sústredné. Dotyčnica k vpísanej kružnici l vytína tetivu kružnice k . Ak touto dotyčnicou otáčame okolo spoločného stredu S , dĺžka vyťatej tetivy sa nemení. Dĺžky tetív EF, GH, IJ, KL sú si preto rovné.

Poznámka:

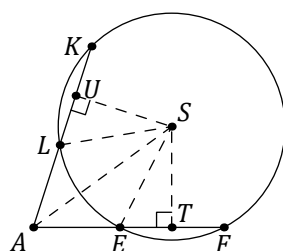
Napriek tomu, že nie je potrebné nič viac ako osová súmernosť (a tento pohľad považujeme za veľmi elegantný aj efektívny), spomenieme aj „štandardnú“ argumentáciu pomocou zhodných trojuholníkov. Tú je možné vykonať niekoľkými spôsobmi, avšak v nasledujúcom prípade je potrebná určitá opatrnosť.

Aby sme dokázali rovnosť $|KL| = |FE|$, ponúka sa zdôvodniť, že trojuholníky SAL a SAE sú podobné a trojuholníky SAK a SAF sú podobné (potom už budeme vedieť, že $|AK| = |AF|$ a $|KL| = |AK| - |AL| = |AF| - |AE| = |FE|$). Trojuholníky SAL a SAE sú zhodné podľa vety sss, ako už bolo spomenuté. Pre zhodnosť trojuholníkov SAK a SAF môžeme využiť zdieľanú stranu SA , zhodné strany SK a SF a zhodné uhly SAK a SAF , avšak žiadna veta o zhodnosti priamo nehovorí, že trojuholníky SAK a SAF sú zhodné. „Najbližšie“ je tomu veta Ssu , ktorá vyžaduje dva páry zhodných strán a jeden pár zhodných uhlov ležiacich však oproti najdlhšej strane trojuholníka, čo nie je náš prípad.

Predstavme si však konštrukciu trojuholníka SAK , keď sú dané dĺžky úsečiek SA a SK a veľkosť uhla SAK . Zaznamenejme uhlom SAK , potom nanesieme dĺžku $|SA|$ a nakoniec kružnica so stredom v bode S a polomerom $|SK|$ pretne druhé rameno uhla SAK v najviac dvoch bodoch. V tomto prípade ho pretne v dvoch rôznych bodoch K a L a skonštruujeme tak dva nezhodné trojuholníky SAL a SAK . Pri konštrukcii trojuholníka SAF sú dané rovnaké tri prvky $|SA|, |SF|$ a $|\sphericalangle SAF|$, takže opäť dostaneme dva nezhodné trojuholníky SAE a SAF , ktoré musia byť v nejakom poradí zhodné s trojuholníkmi SAL a SAK . Keďže trojuholníky SAL a SAE sú zhodné, aj trojuholníky SAK a SAF sú zhodné.

Riešenie 3:

Nech S je stred kružnice a T a U sú jeho kolmé priemety na priamky AE , resp. AL . Keďže trojuholník SEF je rovnoramenný so základňou EF , bod T je jej stred. Podobne bod U je stred tetivy KL .



Trojuholníky SAL a SAE sú zhodné podľa vety sss. Pravouhlé trojuholníky SAT a SAU sú podobné podľa vety uu , pretože $|\sphericalangle SAT| = |\sphericalangle SAU|$, a sú dokonca zhodné, pretože majú spoločnú stranu SA . Preto platí $|AT| = |AU|$,

a následne

$$|LU| = |AU| - |AL| = |AT| - |AE| = |ET|.$$

Odtiaľ už dostávame

$$|LK| = 2 \cdot |LU| = 2 \cdot |ET| = |EF|.$$

Analogicky platia rovnosti $|EF| = |HG|$ a $|GH| = |IJ|$.

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

- A1 [1 bod] Bez dôkazu uvedená zhodnosť dvoch trojuholníkov obsahujúcich jeden z vrcholov A, B, C, D a stred S kružnice, napr. SAL a SAE alebo aj SAK a SAF .
- A2 [1 bod] Zmienka o osovej súmernosti danej niektorou z priamok AS, BS, CS, DS . Stačí hypotéza, správne zdôvodnenie nie je nutné.
- A3 [2 body] Dôkaz zhodnosti jedného páru trojuholníkov zdieľajúcich niektorú zo strán AS, BS, CS, DS , napríklad SAL a SAE alebo SAU a SAT zo vzorového riešenia.
- A4 [4 body] Dôkaz zhodnosti dvoch párov trojuholníkov zdieľajúcich niektorú, avšak pre oba páry rovnakú, zo strán AS, BS, CS, DS , napríklad SAE a SAL a k tomu SAF a SAK alebo SAE a SAL a k tomu SAT a SAU . Ide o to, aby zo zhodnosti týchto dvoch párov už bolo možné odvodiť jednu z rovností $|EF| = |GH| = |IJ| = |KL|$.
- A5 [5 bodov] Zdôvodnenie ktorejkoľvek z rovností $|EF| = |GH| = |IJ| = |KL|$.
- B1 [1 bod] Hypotéza, že daný štvoruholník má vpísanú kružnicu.
- B2 [1 bod] Dôkaz, že niektorá z priamok AS, BS, CS, DS je os uhla pri príslušnom vrchole.
- B3 [4 body] Dôkaz, že daný štvoruholník má vpísanú kružnicu.

Nech a_i je počet bodov za A_i a b_i za B_i . Celkovo potom dajte $\max\{a_1 + a_2, a_3, a_4, a_5, b_1 + b_2, b_3\}$ bodov.

Ak riešiteľ dokáže, že štvoruholník $ABCD$ má vpísanú kružnicu, ktorá je sústredná s danou kružnicou k , a potom vyhlási za zrejmé, že dotyčnice k vpísanej kružnici vytvoria rovnako dlhé tetivy pôvodnej kružnice k , dajte všetkých 6 bodov.

Niektoré riešenia môžu využiť mocnosť bodu ku kružnici. Z mocnosti bodu A k danej kružnici okamžite vyplýva $|AL| \cdot |AK| = |AE| \cdot |AF|$, z čoho $|AK| = |AF|$, a následne $|KL| = |AK| - |AL| = |AF| - |AE| = |FE|$. Tým je okamžite splnený krok A5.

-
- 4 Dvaja hráči hrajú takúto hru: Prvý hráč si tajne vyberie niektoré políčko šachovnice 8×8 . Druhý hráč opakovane volí riadok a stĺpec a pýta sa: „Je tvoje políčko v tomto riadku alebo v tomto stĺpci?“. Prvý hráč mu pravdivo odpovie buď „Áno.“, alebo „Nie.“. Najmenej koľko takých otázok druhý hráč potrebuje, aby s istotou zistil, ktoré políčko si prvý hráč vybral?

(Jozef Rajník)

Riešenie:

Políčko šachovnice v r . riadku a s . stĺpci označíme (r, s) .

Najskôr ukážeme, že druhému hráčovi stačí 9 otázok. Prvými 8 otázkami sa spýta na políčka ležiace na uhlopriečke, t. j. na políčka (i, i) , kde $i \in \{1, \dots, 8\}$. Tým sa spýta na každý riadok aj každý stĺpec, takže nemôže dostať iba odpovede „Nie.“. Ak dostane iba jednu odpoveď „Áno.“, prvý hráč si musí vybrať to políčko (i, i) , pre ktoré zaznela kladná odpoveď. Ak dostane kladné odpovede pre rôzne políčka (i, i) a (j, j) , tak si prvý hráč vybral políčko (i, j) alebo (j, i) . Poslednou otázkou sa druhý hráč spýta na jedno z týchto políčok, čím hľadané políčko odhalí.

Aby sme nahliadli, že 8 otázok druhému hráčovi nestačí (nech už sa bude pýtať akokoľvek), predstavme si, že prvý hráč hrá „nefér“ – na začiatku si nevyberie žiadne políčko, na každú otázku odpovie tak, ako sa mu to práve hodí, a po svojej odpovedi si bude pamätať množinu políčok, ktoré vyhovujú všetkým svojim doterajším odpovediam. Kým bude táto množina políčok neprázdna, nemôže druhý hráč túto neférovú hru prvého hráča odhaliť – ten môže vždy tvrdiť, že si na začiatku vybral jedno z políčok, ktoré v neprázdnej množine zostávajú.

Stratégiou prvého hráča v jeho neférovej hre bude vybrať si z dvoch odpovedí zakaždým tú, ktorá mu v neprázdnej množine ponechá viac políčok. Na prvých 5 otázkach tak odpovie „Nie.“. Potom ešte stále existujú aspoň 3 riadky a aspoň 3 stĺpce, na ktoré sa druhý hráč nespýtal, takže prvému hráčovi zostáva množina najmenej 9 políčok v prieniku týchto riadkov a stĺpcov. Po 6. otázke ostane najmenej 5 políčok, po 7. otázke najmenej 3 políčka a po 8. otázke ešte stále aspoň 2 políčka, o ktorých môže tvrdiť, že si niektoré z nich vybral už na začiatku hry. Druhému hráčovi tak 8 otázok nestačí, nech už volí otázky akokoľvek.

Poznámka:

Aby sme ilustrovali náročnosť rozlíšenia správnej a nesprávnej argumentácie, uvedieme ešte nasledujúce „riešenie“:

Pozrime sa najskôr na šachovnicu 2×2 . Je ľahké overiť, že druhý hráč potrebuje aspoň 3 otázky, aby našiel vybrané políčko. Ak prvý hráč pri veľkej šachovnici 8×8 na prvých 6 otázkach odpovie „Nie“, zostávajú najmenej 2 riadky a najmenej 2 stĺpce, na ktoré sa druhý hráč nespýtal. Z políčok nachádzajúcich sa v prieniku týchto riadkov a stĺpcov môžeme vytvoriť šachovnicu 2×2 a už vieme, že na ňu potrebuje druhý hráč aspoň 3 ďalšie otázky. Preto v takom prípade bude treba aspoň 9 otázkach, 8 nebude druhému hráčovi stačiť.

Táto argumentácia je nesprávna v momente, keď použijeme (sám osebe správny) výsledok pre šachovnicu 2×2 . Na samotnej šachovnici 2×2 sa totiž prvou otázkou vieme opýtať jedine na 3 políčka, zatiaľ čo na „podšachovnici“ 2×2 (vytvorenej zo šachovnice 8×8) sa vieme opýtať aj na 2 políčka tak, že zvolíme políčko vo vhodnom riadku mimo (!) podšachovnice 2×2 . Takže môžu stačiť 2 otázky aj potom, čo 6-krát zaznela odpoveď „Nie.“

Pokyny:

V neúplných riešeniach oceňte čiastočné kroky nasledovne:

- A1 [1 bod] Popis stratégie obsahujúcej 9 otázok, ktoré naozaj stačia na odhalenie vybratého políčka, avšak s chýbajúcim alebo chybným zdôvodnením, prečo tieto otázky stačia. Napríklad v opise „Druhý hráč sa najskôr spýta na 8 políčok na diagonále a deviatou otázkou zistí, ktoré z dvoch políčok si prvý hráč vybral.“ chýba rozbor počtu kladných odpovedí z prvých 8 otázok – predovšetkým zmienka, že môže zaznieť jediná kladná odpoveď.
- A2 [2 body] Dôkaz, že druhému hráčovi 9 otázok pri vhodne zvolenej stratégii stačí.
- B1 [1 bod] Vyslovenie myšlienky, že prvému hráčovi „sa hodí“, aby jej odpovede vyradili menej políčok, než koľko ich zostane (v zmysle vyradených a zvyšných políčok popísaných vo vzorovom riešení).
- B2 [1 bod] Vyslovenie myšlienky, že prvému hráčovi „sa hodí“, aby niekoľko prvých odpovedí bolo negatívnych.
- B3 [2 body] Dôkaz, že 7 otázok druhému hráčovi nestačí, nech sa pýta akokoľvek.
- B4 [4 body] Dôkaz, že 8 otázok druhému hráčovi nestačí, nech sa pýta akokoľvek.

Nech a_i je počet bodov za A_i a b_i za B_i . Celkovo potom dajte $\max\{a_1, a_2\} + \max\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ bodov.

-
- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
 - autor za SK MO: Jozef Rajník
 - recenzenti: Stanislav Krajčí, Peter Novotný
 - preklad: Peter Novotný
-