MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

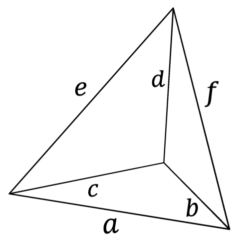
Riešenia úloh krajského kola kategórie B

1 Každej hrane štvorstena priradíme kladné reálne číslo tak, aby niektoré dve steny mali rovnaký súčet čísel svojich troch hrán a zvyšné dve steny mali rovnaký súčin čísel svojich troch hrán. Najviac koľko zo šiestich čísel priradených hranám môže byť rôznych?

(Tomáš Bárta)

Riešenie 1:

Každé dve steny štvorstena majú jednu spoločnú hranu a naopak každá hrana je obsiahnutá v dvoch stenách. Označme čísla priradené hranám štvorstena a, b, c, d, e, f ako na obrázku, pričom a prislúcha hrane spoločnej stenám s rovnakým súčtom a d prislúcha protiľahlej hrane spoločnej stenám s rovnakým súčinom.



Platí teda

$$a + b + c = a + e + f$$

a

$$dbf = dce,$$

z čoho

$$b + c = e + f$$

a

$$bf = ce.$$

Preto platí

$$bf = (e + f - b)e,$$
$$bf = e^2 + fe - be,$$
$$0 = e^2 + fe - be - bf,$$
$$0 = (e - b)(e + f),$$
$$0 = e - b,$$
$$b = e.$$

Potom

$$b + c = e + f = b + f,$$
$$c = f.$$

Naopak, ak $b = e$ a $c = f$, tak

$$a + b + c = a + e + f$$

a

$$dbf = dce,$$

takže toto očíslovanie vyhovuje.

Za a, b, c, d je teda možné zvoliť ľubovoľné čísla, takže je možné ich zvoliť aj navzájom rôzne.

Najviac teda môžu byť na hranách 4 rôzne čísla.

Pokyny:

V neúplných riešeniach postupujúcich podľa vzorového riešenia ohodnoťte kroky nasledovne:

A0 Správna odpoveď bez zdôvodnenia: 0 bodov.

A1 Zostavenie rovníc vyjadrujúcich podmienky zadania: 2 body.

A2 Redukcia sústavy dvoch rovníc na jednu rovnicu: 1 bod.

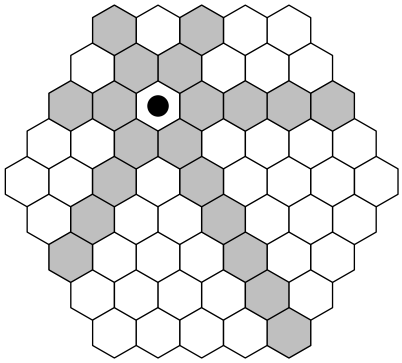
A3 Dôkaz toho, že existujú dve dvojice vrcholov, ktorých oba vrcholy majú rovnaké čísla: 3 body.

A4 Overenie, že nájdená štvorica vyhovuje (v oboch prípadoch stačí deklarovanie, že to tak je, explicitné výpočty nie sú potrebné): 1 bod.

Nech a_i je počet bodov za Ai. Celkovo potom dajte $a_1 + \max\{a_2, a_3\} + a_4$ bodov.

---

2 Hracia plocha na obrázku sa skladá z pravidelných šesťuholníkov. Na každom jej políčku môže stáť najviac jedna figúrka. Figúrka ohrozuje políčka, ktorých stredy ležia na osiach strán šesťuholníka, na ktorom stojí (na obrázku sú vyfarbené). Najviac koľko figúrok je možné na plochu umiestniť tak, aby sa žiadne dve neohrozovali?



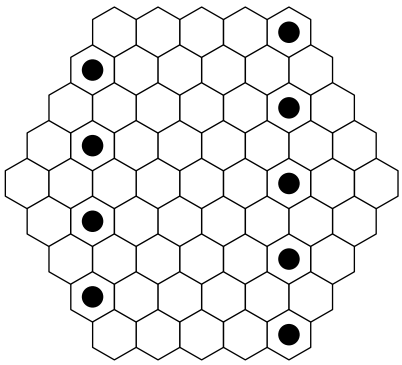
(Jozef Rajník)

Riešenie 1:

Na plochu je možné rozmiestniť najviac 9 figúrok, ktoré sa navzájom neohrozujú.

Políčka hracej plochy na obrázku zo zadania je možné rozdeliť na 9 vodorovných radov. V každom z nich môže stáť najviac jedna figúrka, inak by sa niektoré dve ohrozovali. Figúrok eda nemôže byť viac ako 9.

Obrázok ukazuje možné rozmiestnenie tohto počtu figúrok, pri ktorom sa žiadne dve neohrozujú.



Riešenie 2:

Ukážeme iný dôkaz tvrdenia, že figúrok nemôže byť viac ako 9. Rozborom možností (vzhľadom na symetriu plochy je ich najviac 9) je možné ľahko overiť, že každá figúrka ohrozuje aspoň 16 ďalších políčok okrem toho, na ktorom stojí. Každé políčko môže byť ohrozené najviac 3 figúrkami – najviac raz z každého z troch smerov šesťuholníkovej siete (dve figúrky v rovnakom smere by sa totiž ohrozovali).

Nech na ploche stojí aspoň 10 figúrok, ktoré sa navzájom neohrozujú. Neobsadených políčok je tak najviac 61 − 10 čiže 51. Keďže platí $3 \cdot 51 = 153 < 160 = 16 \cdot 10$, niektoré z neobsadených políčok sú ohrozené aspoň 4-krát, teda aspoň 4 figúrkami. To je však spor s pozorovaním vyššie.

Preto môže byť na ploche za daných podmienok najviac 9 figúrok.

Pokyny:

V neúplných riešeniach ohodnoťte kroky nasledovne:

A0 Správna odpoveď bez zdôvodnenia: 0 bodov.

A1 Dôkaz, že nie je možné umiestniť viac ako 9 figúrok: 3 body.

A2 Dôkaz, že nie je možné umiestniť viac ako 10 figúrok: 2 body.

A3 Dôkaz, že nie je možné umiestniť viac ako 11 figúrok: 1 bod.

A4 Úvaha, ktorú je možné použiť pre horný odhad (napr. rozdelenie na rady, určenie minimálneho počtu políčok ohrozených jednou figúrkou a podobne): 1 bod.

B1 Nájdenie rozmiestnenia 9 neohrozujúcich sa figúrok: 3 body.

B2 Nájdenie rozmiestnenia 8 neohrozujúcich sa figúrok: 2 body.

B3 Nájdenie rozmiestnenia 7 neohrozujúcich sa figúrok: 1 bod.

Nech a_i je počet bodov za Ai a b_i za Bi. Celkovo potom dajte $\max\{a_1 a_2, a_3, a_4\} + \max\{b_1, b_2, b_3\}$ bodov.

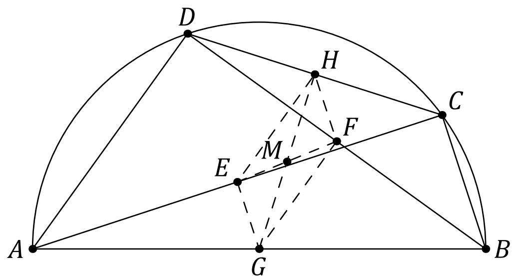
---

3 Do polkružnice s priemerom AB je vpísaný štvoruholník $ABCD$. Dokážte, že stred spojnice stredov jeho uhlopriečok je rovnako vzdialený od bodu C ako od bodu D.

(Patrik Bak)

Riešenie:

Nech E, F, G, H sú postupne stredy úsečiek AC, BD, AB, CD. Bod G je teda stred kružnice opísanej štvoruholníku $ABCD$. Nech M je stred úsečky EF, máme teda dokázať, že $|MC| = |MD|$.



V trojuholníku ABC je GE stredná priečka, takže GE a BC sú rovnobežné a $|GE| = \frac{1}{2}|BC|$. Podobne FH je stredná priečka v trojuholníku DBC, takže FH je rovnobežné s BC a $|FH| = \frac{1}{2}|BC|$. Zároveň polpriamky GE a FH rovnako ako polpriamka BC ležia v tej polrovine určenej priamkou AB obsahujúcej body C a D, takže $GFHE$ je rovnobežník. Keďže uhlopriečky v rovnobežníku majú spoločný stred, M je stred aj druhej uhlopriečky GH.

Keďže body C a D ležia na kružnici so stredom G, platí $|GC| = |GD|$, trojuholník GCD je teda rovnoramenný so základňou CD. Bod H je jej stred, takže priamka HG je os úsečky CD. Všetky body priamky HG majú preto rovnakú vzdialenosť od bodov C a D, špeciálne aj bod M.

Poznámka:

V riešení sme v podstate dokázali tzv. *Varignonovu vetu*:

Stredy strán ľubovoľnej uzavretej lomenej čiary zo štyroch nekolineárnych úsečiek tvoria vrcholy rovnobežníka.

V našom prípade ide o lomenú čiaru $ABDC$.

Pokyny:

V neúplných riešeniach postupujúcich podľa vzorového riešenia ohodnoťte kroky nasledovne:

A1 Pozorovanie, že FG je stredná priečka v trojuholníku BDA a že z toho vyplýva, že FG a DA sú rovnobežné alebo $|FG| = \frac{1}{2} \cdot |DA|$ (alebo analogické pozorovanie pre GE, EH alebo HF): 1 bod.

A2 Dôkaz, že $GFHE$ je rovnobežník: 3 body.

A3 Dôkaz, že M je stred úsečky GH: 4 body.

A4 Dokončenie riešenia za predpokladu, že bod M leží na úsečke GH: 2 body.

Nech a_i je počet bodov za Ai. Celkovo dajte $\max\{a_1, a_2, a_3\} + a_4$ bodov.

---

4 a) Rozhodnite, či každé prirodzené číslo n väčšie než 1 má deliteľa takého, že súčin všetkých ostatných (kladných) deliteľov čísla n je druhá mocnina prirodzeného čísla.

b) Rozhodnite, či pre každé prirodzené číslo d väčšie než 1 existuje prirodzené číslo n také, že d je deliteľ n a súčin všetkých ostatných (kladných) deliteľov čísla n je druhá mocnina prirodzeného čísla.

(Patrik Bak)

Riešenie:

a) Nech p_1, …, p_k sú všetky prvočinitele čísla n. Potom prvočinitele každého deliteľa n sú medzi nimi, takže súčin všetkých deliteľov n je $p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$, kde a_1, …, a_k nejaké nenulové prirodzené čísla.

Nech d je súčin tých p_i, pre ktoré je exponent a_i nepárny, (ak sú všetky exponenty a_i párne, tak $d = 1$).

Potom d je deliteľ n. Ak súčin všetkých deliteľov n vydelíme číslom d, exponent pri každom prvočísle p_i sa zmenší o 1 práve vtedy, keď bol exponent a_i nepárny, a zostane nezmenený, keď bol exponent a_i párny. V tomto podiele teda majú všetky prvočísla párne exponenty, takže je to druhá mocnina prirodzeného čísla.

Odpoveď na otázku zo zadania je teda kladná.

b) Nech $n = d^2$.

Ak je e deliteľ n rôzny od d, tak aj $\frac{n}{e}$ je deliteľ n rôzny od d aj od e a ich súčin je n čiže d^2, Všetky delitele n rôzne od d teda môžeme takto popárovať, a ak je týchto párov m, tak súčin všetkých deliteľov n rôznych od d je $\left(d^2\right)^m$ čiže $\left(d^m\right)^2$.

Odpoveď na otázku zo zadania je teda kladná.

Poznámka:

Všeobecnejšie platí, že pre každé prirodzené číslo d väčšie než 1 je možné za n vziať číslo d^{2l}, kde l je nepárne. Tu podobne popárujeme všetky delitele d^{2l} okrem d^l do dvojíc so súčinom d^{2l}, a ak je týchto dvojíc m, tak súčin všetkých deliteľov včítane nespárovaného d^l je $\left(d^{2l}\right)^m \cdot d^l$, takže po vydelení deliteľom d dostávame $\left(d^{2l}\right)^m \cdot d^{l-1}$ čiže $\left(d^{lm} \cdot d^{\frac{l-1}{2}}\right)^2$.

Poznámka:

Bez dôkazu uvedieme niektoré tvrdenia, pomocou ktorých je možné vyriešiť časť b) bez nápadu, že za n je možné zobrať d^{2l} pre nejaké nepárne l.

Súčin deliteľov čísla $p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ má tvar $p_1^{b_1} \cdot \dots \cdot p_k^{b_k}$, kde

$$b_i = \frac{1}{2} a_i \cdot (a_1 + 1) \cdot \dots \cdot (a_k + 1).$$

Následne je možné ukázať, že tento exponent b_i je nepárny práve vtedy, keď v pôvodnom čísle boli všetky exponenty $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_k$ párne a exponent a_i dáva zvyšok 1 alebo 2 po delení 4.

Pomocou toho je možné pre ľubovoľné d také, že

$$d = q_1^{c_1} q_2^{c_2} \cdots q_l^{c_l},$$

skonštruovať číslo n také, že

$$n = q_1^{e_1} q_2^{e_2} \cdots q_l^{e_l},$$

pričom ak je exponent c_i nepárny, tak za e_i zvolíme ľubovoľné číslo väčšie než c_i, ktoré dáva po delení 4 zvyšok 2, a ak je exponent c_i párny, tak za e_i zvolíme ľubovoľné číslo väčšie než c_i, ktoré dáva po delení 4 zvyšok 0. Tým zabezpečíme, že v súčine deliteľov čísla n bude jednak exponent pri q_i väčší ako c_i a jednak bude nepárny práve vtedy, keď bol exponent c_i nepárny. Po vydelení číslom d budú všetky exponenty párne, a podiel bude druhá mocnina.

Pokyny:

2 body dajte za časť a) a 4 za časť b). V neúplných riešeniach ohodnoťte kroky nasledovne:

- A1 Formulácia platnej hypotézy, že nejaké $d(n)$ (môže byť dané vzorcom, algoritmom alebo iným korektným popisom) je vyhovujúci deliteľ n pre každé prirodzené n väčšie než 1: 1 bod.
- A2 Dôkaz hypotézy a dokončenie časti a): 1 bod
- B1 Formulácia platnej hypotézy, že nejaké n (môže byť dané vzorcom, algoritmom lebo iným korektným popisom) má vyhovujúceho deliteľa d pre každé prirodzené d väčšie než 1: 2 body.
- B2 Dôkaz hypotézy a dokončenie časti b): 2 body.
- C1 Formulácia aspoň jednej časti zadania pomocou prvočíselného rozkladu a parity exponentov: 1 bod.

Nech a_i je počet bodov za Ai, b_i za Bi a c_i za Ci. Celkovo potom dajte $\max\{c_1, a_1 + a_2 + b_1 + b_2\}$ bodov.

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- autor za SK MO: Jozef Rajník
- recenzenti: Stanislav Krajči, Peter Novotný
- preklad: Peter Novotný