

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z6

1 V nasledujúcom sčítacom algebrograme nahradte každú hviezdičku nejakou nenulovou cifrou, všetky písmená P tou istou párnou cifrou a všetky písmená N tou istou nepárnou cifrou tak, aby bol výpočet správny:

$$\begin{array}{r} P P P \\ N N \\ \hline P \\ * * 3 \end{array}$$

Nájdite všetky riešenia.

(Erika Novotná)

Riešenie:

Nenulové párne cifry sú 2, 4, 6 a 8. Rozoberme prípady:

- Nech $P = 2$.

Potom súčet čísel na miestach jednotiek je $4 + N$. Aby sa končil cifrou 3, musí platiť $N = 9$, takže výpočet vyzerá nasledovne:

$$\begin{array}{r} 2 2 2 \\ 9 9 \\ \hline 2 \\ 3 2 3 \end{array}$$

Nech $P = 4$.

Potom súčet čísel na miestach jednotiek je $8 + N$. Aby sa končil cifrou 3, musí platiť $N = 5$, takže výpočet vyzerá nasledovne:

$$\begin{array}{r} 4 4 4 \\ 5 5 \\ \hline 4 \\ 5 0 3 \end{array}$$

- Nech $P = 6$.

Potom súčet čísel na miestach jednotiek je $12 + N$. Aby sa končil cifrou 3, musí platiť $N = 1$, takže výpočet vyzerá nasledovne:

$$\begin{array}{r} 6 6 6 \\ 1 1 \\ \hline 6 \\ 6 8 3 \end{array}$$

- Nech $P = 8$.

Potom súčet čísel na miestach jednotiek je $16 + N$. Aby sa končil cifrou 3, musí platiť $N = 7$, takže výpočet vyzerá nasledovne:

$$\begin{array}{r} 8 8 8 \\ 7 7 \\ \hline 8 \\ 9 7 3 \end{array}$$

Okrem druhého prípadu sú obe cifry na miestach hviezdičiek nenulové. Vyhovujúce prípady sú teda prvý, tretí a štvrtý.

Hodnotenie:

1 bod za vylúčenie prípadu $P = 0$; po 1 bode za rozbor každého z prípadov $P = 2, P = 4, P = 6, P = 8$; 1 bod za záver (výber vyhovujúcich prípadov).

2 Záhrada v tvare obdĺžnika je rozdelená na dve rovnaké obdĺžnikové časti. Obvod celej záhrady je 164 metrov a obvod každej z dvoch častí je 110 metrov.

Aké sú rozmery záhrady?

(Michaela Petrová)

Riešenie:

Obvod obdĺžnikovej záhrady pozostáva z dvoch dvojíc protiláhlých strán:



Rozdiel obvodov celej záhrady a jej ľavej polovice zodpovedá dvom poloviciam rozdelenej strany záhrady. Dlhšia strana záhrady teda meria $164 - 110$ čiže 54 metrov.

Dokopy tieto dve strany spolu merajú $2 \cdot 54$ čiže 108 metrov, teda zvyšné dve strany záhrady spolu merajú $164 - 108$ čiže 56 metrov. Druhá strana záhrady b meria $56 : 2$ čiže 28 metrov.

Rozmery záhrady sú teda 54 a 28 metrov.

Hodnotenie:

3 body za jeden rozmer záhrady; 2 body za druhý rozmer záhrady; 1 bod za kvalitu komentára.

3 Snehulienka a sedem trpaslíkov stáli v rade za sebou tak, že:

- Snehulienka stála priamo medzi bradatým a oholeným trpaslíkom,
- práve jeden bradatý trpaslík mal za oboch susedov oholených trpaslíkov,
- práve jeden oholený trpaslík mal za oboch susedov bradatých trpaslíkov,
- práve jeden bradatý trpaslík mal za oboch susedov bradatých trpaslíkov,
- žiadni dvaja oholení trpaslíci spolu nesusedili.

Nájdite všetky miesta v rade, kde mohla stáť Snehulienka, a pre každú možnosť napíšte aspoň jedno zodpovedajúce poradie Snehulienky a bradatých a oholených trpaslíkov. Vysvetlite, prečo na ostatných miestach Snehulienka stáť nemohla.

(Erika Novotná)

Riešenie:

V nasledujúcich zápisoch budeme označovať Snehulienku S, bradatých trpaslíkov B a oholených trpaslíkov O. Podľa zadania v osemmiestnom poradí

- sa vyskytuje buď trojica OSB, alebo BSO;
- sa vyskytuje presne jedna trojica OBO;
- sa vyskytuje presne jedna trojica BOB,
- sa vyskytuje presne jedna trojica BBB,
- sa nevyskytuje dvojica OO.

Pre každé vyhovujúce poradie je aj zrkadlové poradie vyhovujúce. Takéto dvojice budeme písať na ten istý riadok. Rozoberme prípady:

- Snehulienka stála na prvom alebo ôsmom mieste.
Z prvej podmienky však vyplýva, že Snehulienka má z každej strany aspoň jedného suseda. Tento prípad teda nenastáva.
- Snehulienka stála na druhom alebo siedmom mieste.
Potom vyhovujú nasledujúce možnosti:
 - OSBBBBO a OBBBBO,
 - BSOBBBB a BBBOSB.
- Snehulienka stála na treťom alebo šiestom mieste.

Potom sú z jednej strany Snehulienky 2 voľné miesta a z druhej strany 5. Niekam potrebujeme umiestniť trojice OBO, BOB a BBB. Na kratší koniec sa nevojde žiadna trojica, teda všetky tri sú na dlhšom konci. Trojice OBO a BBB sa však neprekrývajú, takže najúspornejšie súvislé poradie, ktoré obsahuje všetky tieto dve trojice,

zaberá aspoň šesť miest (je to BBBOBO alebo OBOBBB, takže obsahuje aj tretiu trojicu BOB).

Tento prípad teda nenastáva.

- Snehulienka stála na štvrtom alebo piatom mieste.

Potom vyhovujú nasledujúce možnosti:

- BBBSOBOB a BOBOSBBB.

Hodnotenie:

Po 1 bode za každé vyhovujúce miesto Snehulienky a jeden príklad poradia trpaslíkov (dokopy 4 body); 2 body za zdôvodnenie, že inde Snehulienka stáť nemohla.

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- autorka za SK MO: Erika Novotná
- recenzenti: Erika Novotná, Iveta Jančígová, Stanislav Krajčí
- preklad: Erika Novotná