MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z7

1 V tejto dvojici úloh na odčítanie desatinných čísel zodpovedajú rôzne písmená rôznym cifrám, rovnaké rovnakým:

$$\begin{array}{crrrrr} & A & B, & C & D & \\ - & & C, & D & A & B \\ \hline & 3 & 5, & 6 & 6 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{crrrrr} & B & C, & D & A & \\ - & & A, & B & C & D \\ \hline & 3 & 3, & 7 & 5 & 9 \end{array}$$

Nahraďte písmená ciframi tak, aby boli oba výpočty správne.

(Karel Pazourek)

Riešenie:

Pri oboch menšencoch si na mieste tisícin doplníme 0 a pri určovaní neznámych cifier budeme postupovať sprava doľava.

Z posledných cifier (tisícin) oboch výsledkov určíme hodnoty B a D. V oboch prípadoch počítame s prechodom cez desiatku, takže $B = 3$ a $D = 1$. Po dosadení vyzerajú výpočty takto:

$$\begin{array}{crrrrr} & A & 3, & C & 1 & 0 \\ - & & C, & 1 & A & 3 \\ \hline & 3 & 5, & 6 & 6 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{crrrrr} & 3 & C, & 1 & A & 0 \\ - & & A, & 3 & C & 1 \\ \hline & 3 & 3, & 7 & 5 & 9 \end{array}$$

Z predposlednej cifry (stotín) ľavého výpočtu určíme, opäť s prechodom cez desiatku, h že $A = 4$. Po dosadení vyzerajú výpočty takto:

$$\begin{array}{crrrrr} & 4 & 3, & C & 1 & 0 \\ - & & C, & 1 & 4 & 3 \\ \hline & 3 & 5, & 6 & 6 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{crrrrr} & 3 & C, & 1 & 4 & 0 \\ - & & 4, & 3 & C & 1 \\ \hline & 3 & 3, & 7 & 5 & 9 \end{array}$$

Z predposlednej cifry (stotín) pravého výpočtu určíme, opäť s prechodom cez desiatku, že $C = 8$. Po dosadení vyzerajú výpočty takto:

$$\begin{array}{crrrrr} & 4 & 3, & 8 & 1 & 0 \\ - & & 8, & 1 & 4 & 3 \\ \hline & 3 & 5, & 6 & 6 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{crrrrr} & 3 & 8, & 1 & 4 & 0 \\ - & & 4, & 3 & 8 & 1 \\ \hline & 3 & 3, & 7 & 5 & 9 \end{array}$$

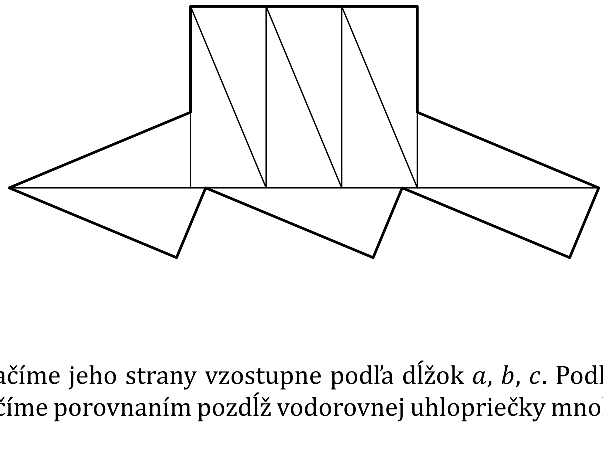
Oba výpočty sú správne, (a to aj na miestach, ktoré sme so predchádzajúcich úvah nezahrnuli). Uvedené nahradenie písmen ciframi je teda jediné možné.

Hodnotenie:

1 bod za každú cifru; 1 bod za záverečné deklarovanie správnosti výpočtu; 1 bod za kvalitu komentára.

2 Mnohouholník na obrázku je zložený z 11 zhodných neprekrývajúcich sa pravouhlých trojuholníkov. Kratšie strany trojuholníkov majú dĺžku 10 cm a 24 cm.

Vypočítajte obvod mnohouholníka.



(Karel Pazourek)

Riešenie:

V každom trojuholníku označíme jeho strany vzostupne podľa dĺžok a, b, c. Podľa zadania $a = 10$ cm a $b = 24$ cm. Najdlhšiu stranu c určíme porovnaním pozdĺž vodorovnej uhlopriečky mnohouholníka. Túto úsečku tvoria tri krátke strany dĺžky a a dve stredné strany dĺžky b, teda

$$3c = 3a + 2b = 3 \cdot 10\,\text{cm} + 2 \cdot 24\,\text{cm} = 78\,\text{cm},$$
$$c = 26\,\text{cm}.$$

Obvod mnohouholníka označme o. Tvorí šesť strán dĺžky a, tri strany dĺžky b, dve strany dĺžky c a dve (zvislé) úsečky dĺžky $b - a$. Platí teda

$$o = 6a + 3b + 2c + 2(b - a) = 4a + 5b + 2c = 4 \cdot 10\,\text{cm} + 5 \cdot 24\,\text{cm} + 2 \cdot 26\,\text{cm}$$
$$= 40\,\text{cm} + 120\,\text{cm} + 52\,\text{cm} = 212\,\text{cm}.$$

Obvod mnohouholníka je teda 212 cm.

Poznámka:

Dĺžka prepony trojuholníka je odvodená bez Pytagorovej vety, ktorej znalosť v tejto kategórii nepredpokladáme. Na kontrolu, resp. ako alternatívne odvodenie uvádzame:

$$c^2 = (26\,\text{cm})^2 = 676\,\text{cm}^2 = 100\,\text{cm}^2 + 576\,\text{cm}^2 = (10\,\text{cm})^2 + (24\,\text{cm})^2 = a^2 + b^2.$$

Obrázok je teda korektný.

Hodnotenie:

2 body za určenie dĺžky tretej strany trojuholníka; 2 body za vyjadrenie obvodu mnohouholníka; 1 bod za vyčíslenie obvodu mnohouholníka; 1 bod za kvalitu komentára.

---

3 Ráno pred otvorením mali v obchode niekoľko horkých čokolád a dvakrát toľko mliečnych čokolád. Počas dňa predali z každého druhu aspoň jednu čokoládu, dokopy 111 kusov, ale nepredali všetky čokolády. Pri večernej uzávierke boli počty horkých a mliečnych čokolád rovnaké.

Aký najväčší a aký najmenší mohol byť počet mliečnych čokolád pred otvorením obchodu?

(Marián Macko)

Riešenie 1:

- Predala sa najmenej 1 horká čokoláda, takže najviac $111 - 1$ čiže 110 mliečnych čokolád. Polovica ranného počtu mliečnych čokolád tak bola najviac $110 - 1$ čiže 109, teda pôvodne ich bolo najviac $2 \cdot 109$ čiže 218.

  Ukážeme, že tento prípad mohol nastať: Ak ich bolo presne 218, tak horkých bolo ráno $218 : 2$ čiže 109. Horká sa predala 1, takže ich zvýšilo $109 - 1$ čiže 108. Aj mliečnych teda zvýšilo 108, takže sa ich predalo 110. Spolu sa teda naozaj predalo $110 + 1$ čiže 111 čokolád.
- Pôvodný počet všetkých čokolád je 3-násobok počtu horkých, čo je deliteľné 3. Keďže aj počet predaných čokolád 111 je deliteľný 3, aj večerný zostatok oboch druhov musí byť deliteľný 3. Zostali teda aspoň 3 horké a 3 mliečne čokolády. V takom prípade raňajší počet všetkých čokolád bol $3 + 3 + 111$ čiže 117, teda horkých čokolád ráno bolo $1/3 \cdot 117$ čiže 39 a mliečnych čokolád $2/3 \cdot 117$ čiže 78.

Ráno bolo v obchode najmenej 78 a najviac 218 mliečnych čokolád.

Riešenie 2:

Nech h je ranný počet horkých čokolád, p počet predaných horkých čokolád a z rovnaké večerné zostatky oboch druhov. Hľadaný ranný počet mliečnych čokolád je teda $2h$.

Potom $z = h - p$ a $(h + p) + p = 111$, t. j. $h = 111 - 2p$.

Ako p, tak z sú podľa zadania nenulové prirodzené čísla. S týmito obmedzeniami možno postupne zistiť najmenšie a najväčšie možné hodnoty h:

p	1	2	...	36	37	...
h čiže $111 - 2p$	109	107	...	39	37	...
z čiže $h - p$	108	105	...	3	0	...
$2h$	218	214	...	78	74	...

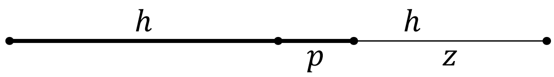
So zväčšujúcim sa p sa h, a teda aj $2h$, zmenšuje. Preto platí:

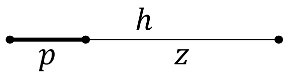
- Najväčšie $2h$ je 108 a zodpovedá prípadu $p = 1$.
- Najmenšie $2h$ je 78 a zodpovedá prípadu $p = 36$.

Ráno teda bolo v obchode najmenej 78 a najviac 218 mliečnych čokolád.

Poznámka:

Pri rovnakom označení ako vyššie v nasledujúcom znázornení zodpovedá prvý riadok mliečnym čokoládam a druhý riadok horkým. Tučnou čiarou je znázornený predaj a tenkou zostatok:





Hodnotenie:

1 bod za čiastkové poznatky a vzťahy; 2 body za odvodenie najmenšieho možného počtu mliečnych čokolád; 3 body za odvodenie najväčšieho možného počtu mliečnych čokolád.

Riešenia založené na skúšaní možností hodnotíme podľa úplnosti postupu a komentára.

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- autor za SK MO: Marián Macko
- recenzenti: Erika Novotná, Iveta Jančigová, Stanislav Krajči
- preklad: Erika Novotná