MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2025/2026

Riešenia úloh okresného kola kategórie Z8

1 Miro zabudol kód na otvorenie dverí, ale vie, že:

- kód je trojciferné číslo deliteľné 3,
- kód pozostáva z navzájom rôznych cifier od 1 do 9,
- súčet použitých cifier je menší ako 17,
- s číslom 419 nemá kód spoločnú žiadnu cifru,
- s číslom 761 má kód spoločnú jednu cifru, ale na inom mieste,
- s číslom 361 má kód spoločnú jednu cifru, ale na inom mieste.

Nájdite všetky kódy vyhovujúce uvedeným podmienkam.

(Miroslava Smitková)

Riešenie:

Podľa štvrtej podmienky nemá kód žiadnu spoločnú cifru s číslom 419. To spolu s druhou podmienkou znamená, že kód môžu tvoriť len cifry 2, 3, 5, 6, 7, 8.

Podľa prvej a tretej podmienky je ciferný súčet kódu deliteľný 3 a menší ako 17. Keďže najmenší súčet použiteľných cifier je $2 + 3 + 5$ čiže 10, možné ciferné súčty sú 12 a 15. Tieto súčty možno z použiteľných cifier získať jedine takto:

- 12 je súčet čísel:
  - 2, 3, 7.
- 15 je súčet čísel:
  - 2, 8, 5,
  - 2, 6, 7,
  - 3, 5, 7.

Z piatej a šiestej podmienky vyplýva, že kód buď obsahuje aspoň jednu spomedzi cifier 7 a 3 a neobsahuje cifru 6, alebo obsahuje cifru 6 a neobsahuje ani jednu spomedzi cifier 7 a 3. Z vypísaných možností tejto požiadavke vyhovujú trojice cifier 2, 3, 7 a 3, 5, 7.

Podľa piatej a šiestej podmienky tiež vieme, že cifry 3 a 7 nemôžu byť na prvom mieste. Všetky možné kódy sú teda 237, 273, 537, 573. Všetky štyri pritom vyhovujú podmienkam zo zadania.

Hodnotenie:

1 bod za zúženie počtu použiteľných cifier na 6; 1 bod za dva možné súčty cifier; po 1 bode za každú vyhovujúcu trojicu cifier; po 1 bode za každú vyhovujúcu dvojicu kódov.

Riešenia založené na skúšaní možností hodnotíme podľa úplnosti postupu a komentára.

---

2 Určte najväčšie trojciferné číslo také, že po pridaní niektorej rovnakej nenulovej cifry na jeho začiatok aj koniec vznikne päťciferné číslo, ktoré je 83-krát väčšie než pôvodné číslo.

(Patrik Bak)

Riešenie:

Označme hľadané trojciferné číslo n a pripojenú cifru p. Podľa zadania má platiť:

$$10000p + 10n + p = 83n,$$

t. j. ekvivalentne

$$10001p = 73n,$$

$$n = 137p.$$

Číslo n je teda deliteľné 137. Najväčšie takéto trojciferné číslo je 959 čiže $137 \cdot 7$, lebo číslo $137 \cdot 8$ čiže 1096 už nie je trojciferné.

Poznámka:

Najväčší možný súčin trojciferného čísla s číslom 83 je menší než 83000, teda pripojená cifra p je najviac 8. Pre takéto p môžeme úlohu skúšať dokončiť ako algebrogram. Namiesto toho, aby sme hľadali najväčšie trojciferné číslo, budeme hľadať najväčšie päťciferné číslo. Jeho 83-ina potom bude najväčšie hľadané trojciferné číslo.

- Nech $p = 8$.

  Potom postupne odvodzujeme:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & a & b & c \\
\cdot & & & 8 & 3 \\ \hline
 & \ast & \ast & \ast & \ast \\
\ast & \ast & \ast & \ast & \\ \hline
8 & a & b & c & 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & a & b & 6 \\
\cdot & & & 8 & 3 \\ \hline
 & \ast & \ast & \ast & 8 \\
\ast & \ast & \ast & 8 & \\ \hline
8 & a & b & 6 & 8
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & a & 9 & 6 \\
\cdot & & & 8 & 3 \\ \hline
 & \ast & \ast & 8 & 8 \\
\ast & \ast & 6 & 8 & \\ \hline
8 & a & 9 & 6 & 8
\end{array}
$$

  Posledný výpočet sa však ďalej doplniť nedá, lebo pre žiadne doplnenie nebude rovnaká cifra a na mieste stoviek v činiteli aj na mieste tisícov vo výsledku.

- Nech $p = 7$.

  Potom postupne odvodzujeme:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & a & b & c \\
\cdot & & & 8 & 3 \\ \hline
 & \ast & \ast & \ast & \ast \\
\ast & \ast & \ast & \ast & \\ \hline
7 & a & b & c & 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & a & b & 9 \\
\cdot & & & 8 & 3 \\ \hline
 & \ast & \ast & \ast & 7 \\
\ast & \ast & \ast & 2 & \\ \hline
7 & a & b & 9 & 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & a & 5 & 9 \\
\cdot & & & 8 & 3 \\ \hline
 & \ast & \ast & 7 & 7 \\
\ast & \ast & 7 & 2 & \\ \hline
7 & a & 5 & 9 & 7
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & 9 & 5 & 9 \\
\cdot & & & 8 & 3 \\ \hline
 & 2 & 8 & 7 & 7 \\
7 & 6 & 7 & 2 & \\ \hline
7 & 9 & 5 & 9 & 7
\end{array}
$$

Najväčšie vyhovujúce číslo je teda $79597 : 83$ čiže 959.

Hodnotenie:

2 body za formulovanie problému pomocou neznámej alebo algebrogramu; 2 body za výsledok; 2 body za zrozumiteľnosť a kvalitu komentára.

---

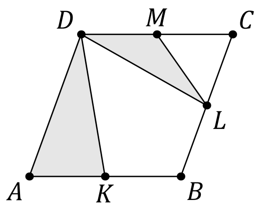
3 Kosoštvorec $ABCD$ má obsah $120\,\mathrm{cm}^2$ a veľkosť uhla BAD je $70°$. Body K, L, M sú postupne stredy strán AB, BC, CD.

Určte súčet obsahov trojuholníkov AKD a DLM.

(Karel Pazourek)

Riešenie:

Situácia je teda takáto:



Nech a je dĺžka strany $ABCD$ a v dĺžka jeho výšky. Potom

$$av = \mathrm{S}(ABCD) = 120\,\mathrm{cm}^2.$$

Strana AK trojuholníka AKB je polovica strany AB a zodpovedajúca výška je rovnaká ako výška v. Preto

$$\mathrm{S}(AKD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot v = \frac{1}{4}\mathrm{S}(ABCD).$$

Strana DM trojuholníka DLM je polovica strany a a zodpovedajúca výška je polovica výšky v. Preto

$$\mathrm{S}(DLM) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{v}{2} = \frac{1}{8}\mathrm{S}(ABCD).$$

Z toho

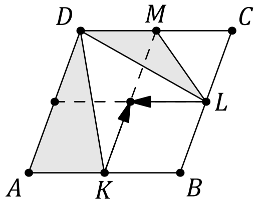
$$\mathrm{S}(AKD) + \mathrm{S}(DLM) = \frac{1}{4}\mathrm{S}(ABCD) + \frac{1}{8}\mathrm{S}(ABCD) = \frac{3}{8}\mathrm{S}(ABCD) = \frac{3}{8} \cdot 120\,\mathrm{cm}^2 = 45\,\mathrm{cm}^2.$$

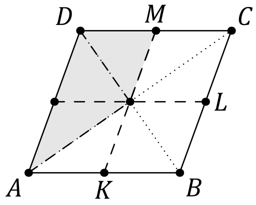
Poznámka:

Údaj o veľkosti uhla BAD je nadbytočný (súvisí so vzťahom medzi veľkosťami a a v, ktorý však na riešenie úlohy nie je potrebný).

Poznámka:

Vzťahy medzi obsahom kosoštvorca a obsahmi čiastkových trojuholníkov možno chápať a znázorniť rôznymi spôsobmi. Pozri napr. nasledujúcu transformáciu zachovávajúcu obsahy alebo doplnenie pomocných úsečiek na porovnanie častí:





Hodnotenie:

2 body za znázornenie, čiastkové postrehy alebo transformácie; 2 body za výsledok; 2 body za zrozumiteľnosť a kvalitu komentára.

- vydali: Slovenská komisia MO a NIVAM – Národný inštitút vzdelávania a mládeže
- autorka za SK MO: Miroslava Smitková
- recenzenti: Erika Novotná, Iveta Jančigová, Stanislav Krajči
- preklad: Erika Novotná