2003/2004
53. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 20. – 23. 6. 2004.*)

1. Dokážte, že reálne čísla p, q, r spĺňajú podmienku

$$p^4(q-r)^2 + 2p^2(q+r) + 1 = p^4$$

práve vtedy, keď kvadratické rovnice

$$x^2 + px + q = 0, \qquad y^2 - py + r = 0$$

majú reálne korene (nie nutne rôzne), ktoré možno označiť $x_{1,2}$ resp. $y_{1,2}$ v takom poradí, že platí rovnosť $x_1y_1 - x_2y_2 = 1$. (*J. Šimša*)

2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo k existuje najviac konečne veľa takých trojíc navzájom rôznych prvočísel p, q, r, pre ktoré je číslo $qr - k$ násobkom p, číslo $pr - k$ násobkom q a súčasne číslo $pq - k$ násobkom r. (...)

3. Vnútri tetivového štvoruholníka $ABCD$ je daný bod P tak, že platí

$$|\measuredangle BPC| = |\measuredangle BAP| + |\measuredangle PDC|.$$

Označme E, F, G päty kolmíc z bodu P postupne na priamky AB, AD a DC. Dokážte, že trojuholník FEG je podobný s trojuholníkom PBC. (*J. Švrček*)

4. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc

$$\frac{1}{xy} = \frac{x}{z} + 1, \quad \frac{1}{yz} = \frac{y}{x} + 1, \quad \frac{1}{zx} = \frac{z}{y} + 1.$$

(*J. Földes*)

5. Vnútri strán AB, BC, CA daného trojuholníka ABC sú zvolené postupne body K, L, M tak, že platí

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{|CM|}{|MA|}.$$

Dokážte, že trojuholníky ABC a KLM majú spoločný priesečník výšok práve vtedy, keď je trojuholník ABC rovnostranný. (*P. Černek*)

6. Na stole leží k kôpok s 1, 2, ..., k kamienkami, pričom $k \geqq 3$. V prvom kroku vyberieme 3 ľubovoľné kôpky na stole, spojíme ich do jednej a z tejto novej kôpky odstránime 1 kamienok (preč zo stola). V druhom kroku opäť spojíme niektoré tri kôpky do jednej a potom z nej odoberieme 2 kamienky. Všeobecne v i-tom kroku spojíme ľubovoľné tri kôpky, v ktorých je spolu viac ako i kamienkov, do jednej kôpky a potom z nej i kamienkov odstránime. Predpokladajme, že po niekoľkých krokoch zostane na stole jediná kôpka, v ktorej je p kamienkov. Dokážte, že číslo p je štvorec práve vtedy, keď obe čísla $2k+2$ a $3k+1$ sú štvorce. Ďalej potom nájdite najmenšie k, pre ktoré je číslo p štvorec. (*R. Kučera*)