2009/2010
59. ročník MO *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

1. *V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc*

$$\begin{aligned}\sqrt{x-y^2}&=z-1,\\ \sqrt{y-z^2}&=x-1,\\ \sqrt{z-x^2}&=y-1.\end{aligned}$$

(*Radek Horenský*)

Riešenie. Hodnoty odmocnín sú vždy nezáporné a odmocňované hodnoty tiež, preto neznáme x, y, z musia spĺňať podmienky $x, y, z \geqq 1$, $x \geqq y^2$, $y \geqq z^2$ a $z \geqq x^2$. Z posledných troch nerovností máme $\max\{x, y, z\} \geqq \max\{y^2, z^2, x^2\}$. Opačná (neostrá) nerovnosť platí vďaka tomu, že $t \leqq t^2$ pre každé $t \geqq 1$. Preto $\max\{x, y, z\} = \max\{y^2, z^2, x^2\} = 1$, teda $x = y = z = 1$ a obe strany všetkých troch rovníc sústavy sú rovné nule (to je skúška).

Obmena postupu. Namiesto úvahy o maximách môžeme po zistení z prvej vety riešenia pokračovať nasledovne: platí $x \geqq y^2 \geqq y \geqq z^2 \geqq z \geqq x^2$, nerovnosť medzi krajnými výrazmi $x \geqq x^2$ už znamená $x = 1$, takže aj hodnoty y, z z uvedeného reťazca šiestich členov sú rovné 1.

Záver. Sústava má jediné riešenie $x = y = z = 1$.

Iné riešenie. (Podľa *Filipa Sládka.*) Ak všetky rovnice umocníme a sčítame, dostaneme

$$(x-1)(1-2x) + (y-1)(1-2y) + (z-1)(1-2z) = 0.$$

Zrejme každý sčítanec je nekladný, keďže $x, y, z \geqq 1$; teda všetky tri sčítance musia byť nulové. Odtiaľ priamo $x = y = z = 1$ a skúškou overíme, že je to naozaj riešenie.

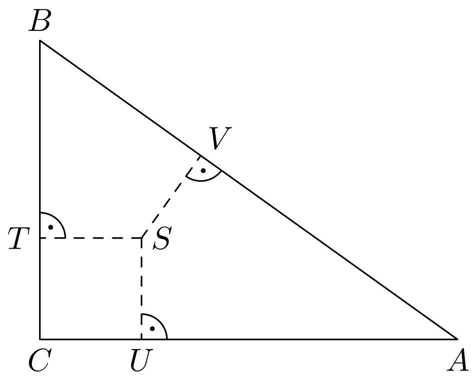
Za úplné riešenie je 6 bodov, ak nie je urobená skúška a podané riešenie ju vyžaduje, strhnite 1 bod. Pri neúplných riešeniach za vypísanie *všetkých šiestich* nerovností z prvej vety riešenia dajte 1 bod, 1 bod dajte aj tým, ktorí hľadanú trojicu uhádnu. Úplné riešenia založené na umocňovaní rovníc (bez podstatného využitia nerovnosti $t \leqq t^2$ pre každé $t \geqq 1$) nie sú úlohovej komisii známe, ak sa také objavia, prosíme o ich zaslanie.

2. *Nájdite všetky možné hodnoty podielu*

$$\frac{r+\varrho}{a+b},$$

pričom r je polomer kružnice opísanej a ϱ polomer kružnice vpísanej pravouhlému trojuholníku s odvesnami dĺžok a a b. (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Pre dĺžky úsekov strán všeobecného trojuholníka ABC od vrcholov k bodom



Obr. 1

dotyku vpísanej kružnice (označeným podľa obr. 1) platia známe vzťahy

$$|AU| = |AV| = \frac{b+c-a}{2}, \ |BV| = |BT| = \frac{a+c-b}{2}, \ |CT| = |CU| = \frac{a+b-c}{2},$$

ktoré možno ľahko získať vyriešením sústavy rovníc

$$|AV| + |BV| = c, \quad |AU| + |CU| = b, \quad |BT| + |CT| = a.$$

Body C, T, U spolu so stredom S vpísanej kružnice sú vo všeobecnosti vrcholmi deltoidu, ktorý je v prípade pravého uhla ACB štvorcom so stranou $\varrho = |SU| = |SV|$. Z porovnania s vyššie uvedenými vzťahmi pre dĺžky úsekov CT, CU vyplýva

$$\varrho = \frac{a+b-c}{2};$$

podľa Tálesovej vety v pravouhlom trojuholníku navyše platí $r = \frac{1}{2}c$. Spolu dostávame

$$r + \varrho = \frac{c}{2} + \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Skúmaný podiel $(r+\varrho)/(a+b)$ má preto v ľubovoľnom pravouhlom trojuholníku jedinú možnú hodnotu, rovnú číslu $\frac{1}{2}$.

Uvedené riešenie možno rôzne meniť, napríklad tak, že namiesto všeobecných vzťahov pre úseky strán vyjdeme z rovností $|CT| = |CU| = \varrho$, z ktorých vyplýva $|AV| = |AU| = b - \varrho$ a $|BV| = |BT| = a - \varrho$, teda

$$2r = c = |AB| = |AV| + |BV| = (b - \varrho) + (a - \varrho),$$

odkiaľ už záver dostaneme okamžite.

Iné riešenie. Pre obsah P všeobecného trojuholníka ABC platí vzorec

$$2P = \varrho(a + b + c);$$

na jeho odvodenie stačí sčítať obsahy trojuholníkov ABS, ACS a BCS majúcich na strany pôvodného trojuholníka zhodné výšky veľkosti ϱ. V prípade $\gamma = 90°$ je však

$2P = ab$ a okrem toho, ako už sme spomenuli vyššie, $r = \frac{1}{2}c$. Spolu s Pytagorovou vetou $c^2 = a^2 + b^2$ tak dostávame

$$r + \varrho = \frac{c}{2} + \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ac + bc + c^2 + 2ab}{2(a+b+c)} = \frac{ac + bc + a^2 + b^2 + 2ab}{2(a+b+c)} =$$
$$= \frac{(a+b)c + (a+b)^2}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b)(a+b+c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b}{2},$$

a prichádzame tak k rovnakému záveru ako v pôvodnom riešení.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Známe vzťahy pre dĺžky úsekov strán od vrcholov k bodom dotyku vpísanej kružnice nie je nutné dokazovať, rovnako ako vzťah medzi obsahom, polomerom kružnice vpísanej a obvodom trojuholníka. Pri neúplných riešeniach dajte 1 bod za vzorec $r = \frac{1}{2}c$; za vyjadrenie ϱ v tvare $\varrho = \frac{1}{2}(a + b - c)$ dajte 3 body, z toho 1 bod za objav štvorca $CUST$, zatiaľ čo za vzorec $2P = \varrho(a + b + c)$ iba 1 bod (posledné dva zisky nemožno sčítať).

---

3. *Na tabuli sú napísané čísla* 1, 2, …, 33. *V jednom kroku zvolíme niekoľko čísel napísaných na tabuli (aspoň dve), ktorých súčin je druhou mocninou prirodzeného čísla, zvolené čísla zotrieme a na tabuľu napíšeme druhú odmocninu z ich súčinu. Takto pokračujeme, až na tabuli ostanú iba také čísla, že súčin žiadnych z nich nie je druhou mocninou. Koľko najmenej čísel môže na tabuli ostať?* (*Peter Novotný*)

Riešenie. Súčin všetkých čísel napísaných na tabuli je rovný

$$S = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31.$$

Prítomnosť nepárnych exponentov znamená, že S nie je druhou mocninou. Preto nemôžeme zotrieť v prvom kroku všetky napísané čísla. Prvočísla 17, 19, 23, 29 a 31 dokonca nezotrieme nikdy. Zo všetkých ostatných čísel, ktoré sa na úpravách zúčastniť môžu, vznikne vždy neprázdny súbor čísel, takže na tabuli bude stále aspoň $5 + 1 = 6$ čísel. Ukážeme, že 6 je hľadaný najmenší počet uvedením jedného postupu (z mnohých možných).

Kvôli nepárnym exponentom pri prvočíslach 2, 3, 5 a 11 vyčleníme najskôr napríklad skupinu čísel $A = \{2, 9, 11, 22, 25\}$ a všetky ostatné čísla rôzne od 17, 19, 23, 29 a 31 zaradíme do skupiny

$$B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33\}.$$

V prvom kroku vyberieme všetky čísla z A a nahradíme ich číslom

$$n = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 22 \cdot 25} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11.$$

Keďže súčin všetkých čísel z B je $2^{31-2} \cdot 3^{15-2} \cdot 5^{7-2} \cdot 7^4 \cdot 11^{3-2} \cdot 13^2 = 2^{29} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2$, vyberieme v druhom kroku číslo n spolu so všetkými číslami z B a nahradíme ich číslom

$$\sqrt{(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11) \cdot (2^{29} \cdot 3^{13} \cdot 5^5 \cdot 7^4 \cdot 11 \cdot 13^2)} = 2^{15} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13.$$

Potom už ostane na tabuli iba šesť čísel, čo je, ako sme vysvetlili, najmenší možný počet.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 1 bod za úvahu o prvočíslach 17, 19, 23, 29 a 31, 2 body za zistenie nepárnych exponentov pri prvočíslach 2, 3, 5 a 11 a 3 body za opis postupu vedúceho k cieľovým šiestim číslam (šieste číslo rôzne od 17, 19, 23, 29 a 31 môže pri rôznych postupoch vyjsť rôzne).

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať ich najneskôr 16. decembra 1. triedou.