

2004/2005

54. ročník MO

Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia

(Súťaž sa konala 19. – 22. 6. 2005.)

1. Nech n je dané prirodzené číslo. V obore nezáporných reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \cdots + x_n^n &= n, \\x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + nx_n &= \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

s neznámymi x_1, x_2, \dots, x_n .

2. Konvexný štvoruholník $ABCD$ je vpísaný do kružnice so stredom O a opísaný kružnici so stredom I . Uhlopriečky AC a BD sa pretínajú v bode P . Dokážte, že body O , I a P ležia na jednej priamke.

3. Určte všetky prirodzené čísla $n \geq 3$, pre ktoré sa polynóm

$$P(x) = x^n - 3x^{n-1} + 2x^{n-2} + 6$$

dá vyjadriť ako súčin dvoch polynómov, ktoré majú kladné stupne a celočíselné koeficienty.

4. Rozdeľme $n \geq 1$ označených guliek medzi deväť osôb $A, B, C, D, E, F, G, H, I$. Určte, koľkými spôsobmi ich môžeme rozdeliť za podmienky, že osoba A dostane rovnaký počet guliek ako osoby B, C, D, E spolu.

5. Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$. Určte množinu všetkých bodov P ležiacich vnútri štvoruholníka $ABCD$, pre ktoré platí

$$S_{PAB} \cdot S_{PCD} = S_{PBC} \cdot S_{PDA},$$

pričom S_{XYZ} označuje obsah trojuholníka XYZ .

6. Nájdite všetky dvojice celých čísel (x, y) , ktoré spĺňajú rovnosť

$$y(x+y) = x^3 - 7x^2 + 11x - 3.$$