

75. ročník Matematickej olympiády

2025/2026

Riešenia úloh celoslovenského stretnutia kategórie Z9

1. Lesníci sa chystajú rúbať v lese. Ekológovia sa toho obávajú, ale lesníci ich upokojujú: „Pozrite sa, v súčasnosti tvoria smrek 96 % všetkých stromov v lese. Budeme rúbať len smrek a po skončení rúbania bude podiel smrekov 95 %, teda takmer rovnaký ako pred rúbaním.“ Koľko percent stromov v lese plánujú lesníci vyrúbať?

Riešenie. Zo štvorpercentnej menšiny stromov pôvodného lesa sa žiadny nevyrúbe. Táto menšina bude tvoriť 5 % nového lesa, čo tak trochu neformálne zapíšeme ako

$$4 \% \text{ pôvodného lesa} = 5 \% \text{ nového lesa.}$$

To znamená, že pomer počtu stromov v novom lese voči počtu stromov v pôvodnom lese bude 4 : 5, t. j. 80 %. Takže lesníci sa chystajú vyrúbať 20 % stromov pôvodného lesa.

Poznámka. Matematicky formálnejšie by sme označili počet stromov pôvodného lesa p , počet stromov nového lesa n a rovnicu zapísali ako $0,04p = 0,05n$. Úpravou získame $\frac{n}{p} = \frac{0,04}{0,05} = 0,80$.

Iné riešenie. Priamočiarejším, ale o niečo ťažkopádnejším postupom je pracovať rovno s podielmi zo zadania. Označme opäť p počet stromov pôvodného lesa, s počet smrekov v pôvodnom lese, s' počet smrekov, ktoré sa majú vyrúbať. V lese zostane $s - s'$ smrekov a počet stromov v novom lese bude $p - s'$. Máme teda zadané, že

$$\frac{s}{p} = 0,96 \quad \text{a} \quad \frac{s - s'}{p - s'} = 0,95.$$

To je sústava dvoch rovníc o troch neznámych, ktoré ale nemusíme všetky vyčísliť. Zadanie od nás len požaduje určiť podiel s'/p . Priamou cestou k tomuto cieľu je pozrieť sa na našu sústavu tak, že p budeme považovať za „známe číslo“ (parameter) a za neznáme budeme považovať iba s a s' , ktoré vyjadríme v závislosti od p .

Z prvej rovnice dostaneme $s = 0,96p$, čo dosadíme do druhej rovnice a vyjadríme s' :

$$\begin{aligned} \frac{0,96p - s'}{p - s'} &= 0,95 \\ 0,96p - s' &= 0,95(p - s') \\ 0,96p &= 0,95p + 0,05s' \\ 0,01p &= 0,05s' \\ \frac{1}{5}p &= s' \end{aligned}$$

Obe neznáme s , s' sme vyjadrili pomocou p a môžeme ľahko zapísať podiel s'/p ako $\frac{1}{5}$, čo je 20 %.

2. *Alica, Bob a Charlie hrali raz popoludní futbal. V každej hre bol jeden brankárom a zvyšní dvaja proti nemu útočili, kým jeden z útočníkov nedal gól. Útočník, ktorý dal gól, sa stal v nasledujúcej hre brankárom. Alica celkom útočila v 10 hrách, Bob v 18 hrách a Charlie v 14 hrách. Kto mohol dať šiesty gól? Určte všetky možnosti.*

Riešenie. Šiesty gól mohla dať jedine Alica.

Alica útočila v 10 hrách, Bob v 18 a Charlie v 14, takže vo všetkých hrách dokopy útočilo celkom $10 + 18 + 14 = 42$ hráčov. Pritom v každej hre útočili presne dvaja hráči, takže prebehlo $42/2 = 21$ hier.

Z týchto 21 hier útočila Alica len v 10 hrách, takže v 11 hrách musela byť v bráne. Nikto ale nemôže byť v bráne dvakrát po sebe (akonáhle dostane gól, opustí bránu a vlastné góly sa nepočítajú), takže Alica musela byť v bráne v prvej hre a potom v každej nepárnej hre až po tú úplne poslednú, dvadsiatuprvú. Špeciálne musela byť v bráne aj v siedmej hre, teda práve ona musela útočiť a dať gól v predchádzajúcej šiestej hre.

Poznámka. V riešení sme ukázali, že Alica musela dať šiesty gól, ale nezaoberali sme sa otázkou, či ho vôbec dať mohla – keby zadanie obsahovalo sporné podmienky, mohla by otázka v princípe mať aj odpoveď „nikto“. Touto otázkou sa našťastie nie je potrebné zaoberať, pretože podľa zadania futbalové popoludnie nejako prebehlo. Napriek tomu pre úplnosť uvedme príklad, ako sa postupne mohli brankári striedať:

$$A \underbrace{B A B A B}_3 A \underbrace{C A C A C A C A C A C}_7 A$$

3. *Nájdite najmenší kladný násobok čísla 2025, ktorý začína štvorčíslím 2026.*

Riešenie. Kedykoľvek budeme hovoriť o zvyšku, budeme mať na mysli zvyšok po delení číslom 2025.

Číslo 2026 dáva zvyšok 1, takže 20260 = 10 · 2026 dáva zvyšok 10 · 1. Čísla 20260, 20261, ..., 20269 tak dávajú postupne zvyšky 10, 11, ..., 19 a nie sú násobkami 2025. Rozmyslíme si, že podobne šesťciferné aj sedemciferné čísla dávajú malé zvyšky:

- Najmenšie šesťciferné číslo začínajúce 2026, t.j. číslo 202600, dáva zvyšok 100, a tak čísla 202600, 202601, ..., 202699 dávajú postupne zvyšky 100, 101, ..., 199 a nemôžu byť násobkami 2025.
- Najmenšie sedemciferné číslo začínajúce 2026, t.j. číslo 2026000, dáva zvyšok 1000, a tak čísla 2026000, 2026001, ..., 2026999 dávajú postupne zvyšky 1000, 1001, ..., 1999 a ani ony nemôžu byť násobkami 2025.

Najmenšie osemciferné číslo začínajúce 2026, t.j. číslo 20260000, zapíšeme v tvare 20250000 + 10000. Prvý sčítanec je násobkom 2025, takže hľadáme najmenší násobok čísla 2025 presahujúci 10000. Keďže $4 \cdot 2025 < 10000 < 5 \cdot 2025 = 10125$, číslo 20250000 + 10125 = 20260125 je najmenším násobkom 2025 začínajúcim štvorčíslím 2026.

Poznámka. Prvé dva odseky vzorového riešenia môžeme zapísať „dospelejšie“, ale asi menej zrozumiteľne. Hľadáme $(4 + k)$ -ciferné číslo pre celé $k \geq 0$. Všetky takéto čísla sú z intervalu od $2026 \cdot 10^k$ do $2027 \cdot 10^k$ (nezaobráame sa teraz otázkou, či krajné čísla do intervalu zaradiť alebo nie). Ich zvyšky sa pohyujú v intervale od 10^k do $2 \cdot 10^k$.

Medzi nimi hľadáme násobok 2025, čo sa môže podariť len vtedy, ak $2025 \leq 2 \cdot 10^k$, teda nutne $k \geq 4$.

Uvedené riešenie nevyužíva žiadnu špeciálnu vlastnosť čísel 2025, 2026, takže ho môžeme použiť aj pre iné po sebe idúce štvorciferné čísla. Je možné, že v školskom roku 4567/4568 budú žiaci hľadať najmenší násobok čísla 4567 začínajúci štvorčíslím 4568 a úplne rovnakými argumentmi vylúčia všetky najviac sedemciferné čísla. Keďže $2 \cdot 4567 < 10000 < 3 \cdot 4567 = 13701$, je 45683701 najmenším násobkom 4567, ktorý začína štvorčíslím 4568.

Iné riešenie. V prípade čísla 2025 môžeme využiť jeho rozklad $25 \cdot 9 \cdot 9$ a známe tvrdenia o deliteľnosti 25 a 9:

- Číslo je deliteľné 25 práve vtedy, keď končí dvojčíslím 00, 25, 50 alebo 75.
- Číslo je deliteľné 9 práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný 9.

Pre deliteľnosť 25 sa tak za ciframi 2026 musia nachádzať aspoň dve ďalšie cifry. Ciferný súčet štvorčíslia 2026 je 10, takže pridaním žiadneho z dvojčíslí 00, 25, 50, 75 s cifernými súčtami 0, 7, 5, 12 nedostaneme násobok 9.

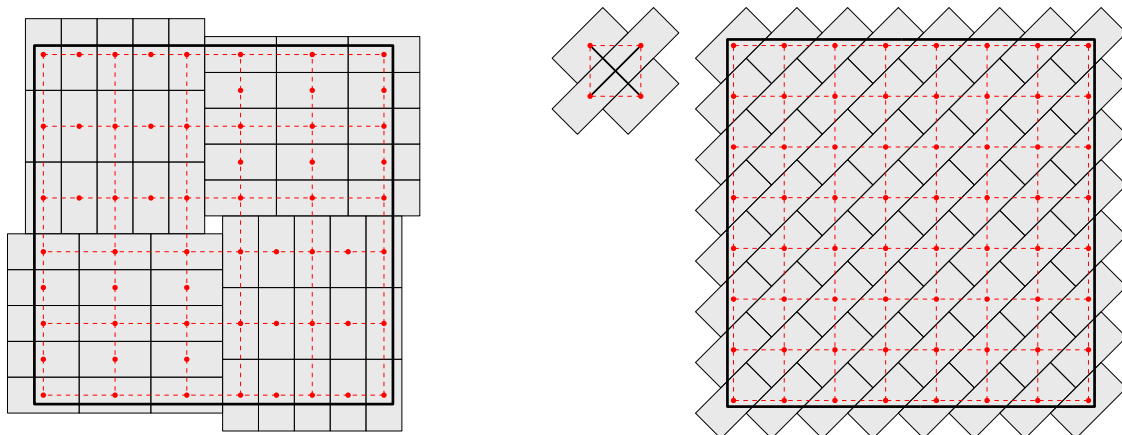
Ak sú za štvorčíslím 2026 tri cifry, kvôli deliteľnosti 25 prichádzajú do úvahy iba čísla tvaru $2026\Box00$, $2026\Box25$, $2026\Box50$, $2026\Box75$. Deliteľnosť 9 a už uvedené ciferné súčty umožňujú jednoznačne dopočítať chýbajúce cifry: 2026800, 2026125, 2026350, 2026575. Uvedené čísla sú deliteľné $25 \cdot 9 = 225$, ale je možné overiť, že žiadne z nich nie je deliteľné $25 \cdot 9 \cdot 9 = 2025$.

Ak sú za štvorčíslím 2026 štyri cifry, kvôli deliteľnosti 25 prichádzajú do úvahy iba čísla tvaru $2026\Box\Box00$, $2026\Box\Box25$, $2026\Box\Box50$, $2026\Box\Box75$. Ak doplníme na vynechané pozície najmenšie možné dvojčíslie 00, nebude mať žiadne z čísel ciferný súčet deliteľný 9. Druhé najmenšie dvojčíslie 01 vytvorí jediné číslo deliteľné 9, konkrétne 20260125. Ľahko overíme, že $20260125 = 2025 \cdot 10005$, takže toto číslo je najmenším násobkom 2025, ktorý začína štvorčíslím 2026.

4. Na stolík 10×10 ukladáme dominové kocky 1×2 tak, že sa žiadne dve neprekrývajú. Kocky môžu čiastočne prečnievať cez hrany stolíka, ale aby nespadli, musia ich stredy ležať na stolíku, nie na jeho hrane ani mimo. Kocky sa nesmú stavať „na bok“.

- Nájdite spôsob, ako na stolík uložiť 60 kociek, ak strany kociek musia byť rovnobežné so stranami stolíka. (Za uloženie viac ako 50 kociek dostanete čiastočné body.)
- Nájdite spôsob, ako na stolík uložiť viac ako 60 kociek, ak strany kociek nemusia byť rovnobežné so stranami stolíka.

Riešenie. Na obrázku vľavo znázorňujeme, ako rozmiestniť 60 kociek so stranami rovnobežnými so stranami stolíka. Na obrázku vpravo je 64 kociek umiestnených na stolík „šikmo“ so sklonom 45 stupňov. Všetkým kockám sme vyznačili ich stredy (červené bodky) a stredy kociek sme zarovnali do naznačenej mriežky (prerušované čiary).



Obr. 1

Ešte je potrebné zdôvodniť, že kocky možno naozaj zarovnať tak, aby prerušované naznačené čiary naozaj boli rovné, a že celá naznačená mriežka má rozmery menšie ako 10×10 . To urobíme pre každú časť zvlášť.

- a) Naznačená mriežka sa skladá z obdĺžnikov a štvorcov, ktoré majú rozmery buď 2×2 (skoro všade), alebo $2 \times 1,5$ (pri osiach strán naznačeného stolíka), alebo $1,5 \times 1,5$ (úplne uprostred). Prerušované čiary sú preto naozaj priame. Horný okraj prerušovane vyznačenej mriežky má celkovú dĺžku $2 \cdot 2 + (0,5 + 1) + 2 \cdot 2 = 9,5$ a podobne majú dĺžku 9,5 aj zvyšné okraje mriežky. Celá prerušovaná mriežka sa teda (aj s rezervou) zmestí na stolík 10×10 .
- b) Predstavme si najskôr štyri dominové kocky zarovnané ako na obrázku uprostred. Stredy týchto štyroch kociek tvoria štvoruholník. Obe uhlopriečky tohto štvoruholníka majú dĺžku 2. Navyše sú tieto uhlopriečky rovnobežné so stranami kociek, takže sú navzájom kolmé. Štvoruholník je preto štvorec, jeho uhlopriečky sa rozpolujú a dĺžka jeho strany je z Pytagorovej vety rovná $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Na obrázku vpravo sú tak stredy dominových kociek zarovnané do štvorcovej mriežky s rozmermi $7\sqrt{2} \times 7\sqrt{2}$. A keďže $7 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{98} < \sqrt{100} = 10$, zmestí sa aj tentoraz celá prerušovaná mriežka (aj s rezervou) na stolík 10×10 .