2025/2026
75. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia juniorov*

(*Súťaž sa konala 22. – 25. 5. 2026.*)

Súťaž jednotlivcov:

I-1. Koľkými spôsobmi vieme čísla z množiny $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ popárovať do n dvojíc tak, aby súčet každej dvojice bol o jedna väčší ako mocnina čísla 2?

I-2. V pravidelnom dvanásťuholníku $ABCDEFGHIJKL$ sa uhlopriečky AH a EK pretínajú v bode P. Dokážte, že

$$|AC| + |KP| = |AE|.$$

I-3. Pre reálne čísla a, b, c platí, že všetky zlomky

$$\frac{bc+1}{a}, \quad \frac{ca+1}{b}, \quad \frac{ab+1}{c},$$

majú rovnakú hodnotu. Aké reálne čísla môžu byť touto rovnakou hodnotou?

I-4. Do každého štvorčeka tabuľky 100×100 sme nakreslili 0, 1 alebo 2 uhlopriečky. Aký najväčší počet uhlopriečok sme mohli nakresliť tak, aby žiadne dve nemali spoločný koncový bod?

I-5. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole A. Nech D je priesečník osi uhla BAC so stranou BC. Predpokladajme, že dĺžka úsečky AD je racionálne číslo. Aký najväčší počet strán trojuholníka ABC môže mať racionálnu dĺžku?

Súťaž družstiev:

T-1. Pro přirozená čísla a, b, c platí

$$a^2 + b^2 + c^2 + 1 = abc + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}.$$

Dokažte, že abc je druhou mocninou přirozeného čísla.

T-2. Máme k dispozici euklidovské pravítko, které nám umožňuje libovolnými dvěma body vést přímku, a nástroj *okružítko*, který pro libovolný trojúhelník sestrojí kružnici mu opsanou spolu s jejím středem. Je dán trojúhelník ABC. Pomocí těchto nástrojů sestrojte

a) těžiště trojúhelníku ABC,
b) střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC.

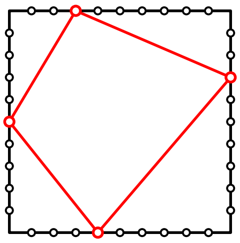
T-3. Rozważono wszystkie uporządkowane trójki dodatnich liczb całkowitych (x, y, z), z których każda jest nie większa od 100. Dla każdej takiej trójki zapisano na kartce wartość

$$|x-y|+|y-z|+|z-x|.$$

Którą wartość zapisano najczęściej i ile razy?

T-4. Parę różnych liczb całkowitych nazwiemy *stromą*, jeżeli można zapisać te liczby obok siebie w pewnej kolejności tak, aby otrzymany ciąg cyfr był niemalejący. Załóżmy, że zbiór $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 99\}$ nie zawiera żadnej stromej pary. Jaka jest największa możliwa liczba elementów zbioru S?

T-5. Každá strana štvorca 10×10 je deviatimi bodmi rozdelená na 10 úsečiek dĺžky 1 (pozri obr. 1). Krivoš a Dominik hrajú hru, v ktorej striedavo vyberú ešte nevybratú stranu štvorca a zafarbia načerveno jeden z 9 vyznačených bodov na nej, pričom Krivoš začína. Na konci sú červené body spojené do konvexného štvoruholníka. Dominik vyhrá, ak obsah tohto štvoruholníka je dané reálne číslo S, inak vyhrá Krivoš. V závislosti od S určte, ktorý hráč má výhernú stratégiu.



Obr. 1

T-6. Nech a, b, c, d, e sú celé čísla také, že pre ľubovoľné dve z nich platí, že ich súčet je väčší ako ich súčin. Dokážte, že

$$a+b+c+d+e > abcde.$$