2005/2006
55. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 25. – 28. 6. 2006.*)

1. Na kružnici s polomerom r leží 5 rôznych bodov A, B, C, D, E v tomto poradí, pričom platí $|AC| = |BD| = |CE| = r$. Dokážte, že trojuholník, ktorého vrcholy sú ortocentrá trojuholníkov ACD, BCD a BCE, je pravouhlý. (*Tomáš Jurík*)

2. Okolo okrúhleho stola sedí n detí. Erika je z nich najstaršia a má n cukríkov. Ostatné deti nemajú žiadne cukríky. Erika sa rozhodla, že cukríky rozdelí a stanovila nasledovné pravidlá. V každom kole zdvihnú ruky všetky deti, ktoré majú pri sebe aspoň dva cukríky. Erika jedného z prihlásených vyberie a ten dá každému svojmu susedovi jeden cukrík. (V prvom kole sa teda prihlási iba Erika a dá svojim dvom susedom po cukríku.) Zistite, pre ktoré $n \geqq 3$ môže delenie po konečnom počte kôl skončiť tak, že každé dieťa bude mať práve jeden cukrík. (*Peter Novotný*)

3. Súčet štyroch reálnych čísel sa rovná 9, súčet ich druhých mocnín sa rovná 21. Dokážte, že dané čísla možno označiť a, b, c a d tak, aby platila nerovnosť $ab - cd \geqq 2$. (*Jaromír Šimša*)

4. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $k \geqq 1$ existuje také prirodzené číslo n, že v zápise čísla 2^n v desiatkovej sústave sa nachádza blok práve k za sebou idúcich núl, t. j.

$$2^n = \dots a\underbrace{00\dots0}_{k\ \text{núl}}b\dots,$$

pričom cifry a, b sú nenulové. (*Peter Novotný*)

5. Zistite, koľko existuje postupností celých čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ takých, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$a_n \neq -1 \qquad \text{a} \qquad a_{n+2} = \frac{a_n + 2\,006}{a_{n+1} + 1}.$$

(*Peter Novotný*)

6. Zistite, či existuje taký konvexný päťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5$, že pre každé $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sú priamky A_iA_{i+3}, $A_{i+1}A_{i+2}$ rôznobežné a pretínajú sa v bode B_i, pričom body B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 ležia na jednej priamke. (Uvažujeme $A_6 = A_1$, $A_7 = A_2$ a $A_8 = A_3$.) (*Waldemar Pompe*)