2006/2007
56. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 24. – 27. 6. 2007.*)

1. Nájdite všetky mnohočleny P s reálnymi koeficientmi, pre ktoré rovnosť

$$P(x^2) = P(x) \cdot P(x+2)$$

platí pre ľubovoľné reálne číslo x. (*Pavel Calábek*)

2. Nech $a_1 = a_2 = 1$ a $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ pre každé $k \in \mathbb{N}$ (Fibonacciho postupnosť čísel). Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m existuje taký index k, pre ktorý je číslo $a_k^4 - a_k - 2$ deliteľné číslom m. (*Ján Mazák*)

3. Nech k je kružnica opísaná takému konvexnému štvoruholníku $ABCD$, že polpriamky DA a CB sa pretínajú v bode E, pre ktorý platí $|CD|^2 = |AD| \cdot |ED|$. Označme F ($F \neq A$) priesečník kružnice k s priamkou predchádzajúcou bodom A a kolmou na ED. Dokážte, že potom platí: Úsečky AD a CF sú zhodné práve vtedy, keď stred kružnice l opísanej trojuholníku ABE leží na priamke ED. (*Jaroslav Švrček*)

4. Dokážte, že pre každé reálne číslo $p \geqq 1$ možno z množiny reálnych čísel x spĺňajúcich nerovnosti

$$p < x < \left(2 + \sqrt{p + \frac{1}{4}}\right)^2$$

vybrať štyri navzájom rôzne prirodzené čísla a, b, c, d, pre ktoré platí rovnosť $ab = cd$. (*Jaromír Šimša*)

5. Zistite, pre ktoré

$$n \in \{3\,900, 3\,901, 3\,902, 3\,903, 3\,904, 3\,905, 3\,906, 3\,907, 3\,908, 3\,909\}$$

možno množinu $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ rozdeliť na disjunktné trojice tak, aby v každej trojici sa jedno číslo rovnalo súčtu ostatných dvoch čísel. (*Peter Novotný*)

6. Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník. Kružnica prechádzajúca bodmi A a D má vonkajší dotyk s kružnicou predchádzajúcou bodmi B a C vo vnútornom bode P uvažovaného štvoruholníka. Predpokladajme, že

$$|\measuredangle PAB| + |\measuredangle PDC| \leqq 90^\circ \quad \text{a} \quad |\measuredangle PBA| + |\measuredangle PCD| \leqq 90^\circ.$$

Dokážte, že potom platí $|AB| + |CD| \geqq |BC| + |AD|$. (*Waldemar Pompe*)