2007/2008
57. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 22. – 25. 6. 2008.*)

1. Určte všetky trojice (x, y, z) kladných reálnych čísel, ktoré sú riešením sústavy rovníc

$$\begin{aligned} 2x^3 &= 2y(x^2+1) - (z^2+1), \\ 2y^4 &= 3z(y^2+1) - 2(x^2+1), \\ 2z^5 &= 4x(z^2+1) - 3(y^2+1). \end{aligned}$$

(*Adam Osekowski*)

2. Daný je konvexný šesťuholník $ABCDEF$, pričom $|\measuredangle FAB| = |\measuredangle BCD| = |\measuredangle DEF|$ a $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$, $|EF| = |FA|$. Dokážte, že priamky AD, BE a CF sa pretínajú v jednom bode. (*Waldemar Pompe*)

3. Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré je číslo

$$\binom{p}{1}^2 + \binom{p}{2}^2 + \dots + \binom{p}{p-1}^2$$

deliteľné číslom p^3. (*Jarosław Wróblewski*)

4. Dokážte, že existuje také prirodzené číslo n, že číslo $k^2 + k + n$ nemá žiadneho prvočíselného deliteľa menšieho ako 2008 pre žiadne celé číslo k.
(*Jarosław Wróblewski*)

5. Daný je pravidelný päťuholník $ABCDE$. Určte najmenšiu hodnotu výrazu

$$\frac{|PA| + |PB|}{|PC| + |PD| + |PE|},$$

pričom P je ľubovoľný bod ležiaci v rovine päťuholníka $ABCDE$. (*Waldemar Pompe*)

6. Nájdite všetky trojice (k, m, n) prirodzených čísel majúce nasledujúcu vlastnosť: Štvorec s dĺžkou strany m sa dá rozdeliť na niekoľko pravouholníkov s rozmermi $1 \times k$ a práve jeden štvorec s dĺžkou strany n. (*Jarosław Wróblewski*)