

2025/2026
75. ročník MO

Zadania úloh CAPS

(Súťaž sa konala 21. – 24. 6. 2026.)

1. V postupnosti $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ 100 rôznych reálnych čísel hovoríme, že index $i \in \{2, 3, \dots, 99\}$ je *dobrý*, ak $a_1 + \dots + a_{i-1} = a_{i+1} + \dots + a_{100}$. Aký je najväčší možný počet dobrých indexov? (Josef Tkadlec)

2. Kladné celé číslo k sa nazýva *rozdeľujúce*, ak existuje iba konečný počet štvoríc kladných celých čísel (x, y, z, w) spĺňajúcich

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = xyzw \quad \text{a} \quad k \nmid x^2 + y^2 + z^2 + w^2.$$

Nájdite všetky rozdeľujúce kladné celé čísla. (Dominik Pultar)

3. Nech $ABCD$ je štvoruholník, ktorému sa da vpísať kružnica so stredom I . Body K a L sú zvolené postupne na úsečkách IA a IC tak, že $CK \perp ID$ a $AL \perp IB$. Body P a Q ležia postupne na úsečkách AD a BC tak, že $|\angle AKP| = |\angle ICD|$ a $|\angle CLQ| = |\angle IAB|$. Dokážte, že $|IP| = |IQ|$. (Vadym Solomka)

4. Tom a Jerry hrajú nasledujúcu hru na šachovnici 16×16 . Jerry začína tým, že si vyberie niektoré, ale nie všetky políčka šachovnice a do každého z nich položí jeden svoj červený kameň. Následne Tom položí jeden svoj čierny kameň do nejakého prázdneho políčka a rozhodne sa, či chce byť lovec alebo koristi. Potom sa Tom a Jerry striedajú v ťahoch. Jerry začína. V každom ťahu si hráč zvolí jeden z jeho kameňov a posunie ho do susedného políčka, ktoré zdieľa s pôvodným políčkom hranu. Ak by takýto ťah posunul kameň mimo šachovnice, kameň sa objaví na druhej strane šachovnice (t. j. ak je kameň na ľavom okraji, objaví sa v tom istom riadku na pravom okraji, analogicky v ostatných prípadoch). Ak sa v hociktorom momente hry kameň lovca a kameň koristi nachádzajú na tom istom políčku, hra končí a vyhráva lovec. Nekonečná hra znamená výhru koristi. Kto vyhrá, ak obaja hrajú optimálne? (Jakub Löwit)

5. Nech M je stred strany AD v tetivovom štvoruholníku $ABCD$. Body K a L sú zvolené postupne na polpriamkach MB a MC tak, že $|\angle DAK| + |\angle MCA| = |\angle MBA|$ a $|\angle ADL| + |\angle MBD| = |\angle MCD|$. Dokážte, že body B, C, K , a L ležia na jednej kružnici. (Vadym Solomka)

6. Nech $n \geq 2$ je celé číslo a $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú nenulové reálne čísla také, že

$$a_1 + \frac{1}{a_2}, \quad a_2 + \frac{1}{a_3}, \quad \dots, \quad a_{n-1} + \frac{1}{a_n}, \quad a_n + \frac{1}{a_1}$$

sú všetky celé čísla. Dokážte, že

$$a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}$$

je tiež celé číslo.

(Josef Tkadlec)