2008/2009
58. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 21. – 24. 6. 2009.*)

1. Označme $\mathbb{R}^+$ množinu všetkých kladných reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktoré pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}^+$ spĺňajú podmienku

$$\bigl(1 + yf(x)\bigr)\bigl(1 - yf(x+y)\bigr) = 1.$$

(*František Kardoš*)

2. Pre dané kladné celé čísla a, k je postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ definovaná vzťahmi

$$a_1 = a \qquad \text{a} \qquad a_{n+1} = a_n + k \cdot \varrho(a_n) \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots,$$

pričom $\varrho(m)$ označuje súčin cifier čísla m zapísaného v desiatkovej sústave (napríklad $\varrho(413) = 12$, $\varrho(308) = 0$ a pod.). Dokážte, že existujú kladné celé čísla a, k také, že postupnosť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ obsahuje práve 2009 rôznych čísel. (*Peter Novotný*)

3. Nech k je kružnica pripísaná k strane BC daného trojuholníka ABC. Zvoľme priamku p rovnobežnú so stranou BC pretínajúcu úsečky AB, AC v bodoch D, E. Kružnicu vpísanú do trojuholníka ADE označme l. Dotyčnice ku kružnici k vedené z bodov D, E neprechádzajúce bodom A sa pretínajú v bode P. Dotyčnice ku kružnici l vedené z bodov B, C neprechádzajúce bodom A sa pretínajú v bode Q. Dokážte, že priamka PQ prechádza pevným bodom nezávislým od voľby priamky p.

(*Tomáš Jurík*)

4. Daná je kružnica k a jej tetiva AB, ktorá nie je jej priemerom. Vnútri dlhšieho oblúka AB kružnice k zvolíme ľubovoľne bod C. Obrazy bodov A a B v osových súmernostiach podľa priamok BC a AC označíme K a L. Dokážte, že vzdialenosť stredov úsečiek KL a AB nezávisí od polohy bodu C. (*Tomáš Jurík*)

5. Daná je n-tica celých čísel $a_1, \dots, a_n$ spĺňajúca nasledujúce podmienky:
(*i*) $1 \leqq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leqq 50$;
(*ii*) pre každú n-ticu kladných celých čísel $b_1, \dots, b_n$ existuje kladné celé číslo m a n-tica kladných celých čísel $c_1, \dots, c_n$ taká, že

$$m \cdot b_i = c_i^{a_i} \quad \text{pre } i = 1, \dots, n.$$

Dokážte, že $n \leqq 16$ a určte počet rôznych n-tíc $a_1, \dots, a_n$ spĺňajúcich dané podmienky pre $n = 16$. (*Peter Novotný*)

6. Nech $n \geqq 16$ je prirodzené číslo. Uvažujme množinu

$$G = \bigl\{(x, y) \ : \ x, y \in \{1, 2, \dots, n\}\bigr\}$$

pozostávajúcu z n^2 bodov roviny. Nech A je ľubovoľná podmnožina množiny G obsahujúca aspoň $4n\sqrt{n}$ prvkov. Dokážte, že existuje aspoň n^2 konvexných štvoruholníkov majúcich vrcholy v A, ktorých všetky uhlopriečky prechádzajú jedným bodom.

(*Poľsko*)