2011/2012
61. ročník MO *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

(*Súťaž sa konala 24. – 27. 6. 2012.*)

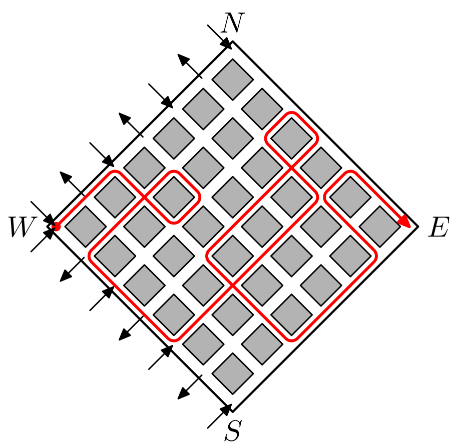
1. Pre dané kladné celé číslo n označme $\tau(n)$ počet kladných deliteľov čísla n a $\varphi(n)$ počet kladných celých čísel, ktoré nie sú väčšie ako n a sú s n nesúdeliteľné. Nájdite všetky n, pre ktoré je niektoré z troch čísel n, $\tau(n)$, $\varphi(n)$ aritmetickým priemerom zvyšných dvoch.
(*Peter Novotný*)

2. Nájdite všetky funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ také, že rovnosť
$$f(x+f(y))-f(x)=(x+f(y))^4-x^4$$
platí pre všetky $x,y\in\mathbb{R}$. (*Kamil Duszenko*)

3. Daný je tetivový štvoruholník $ABCD$ s opísanou kružnicou ω. Označme postupne I, J, K stredy kružníc vpísaných do trojuholníkov ABC, ACD, ABD. Nech E je stred oblúka DB kružnice ω obsahujúceho bod A. Priamka EK pretína kružnicu ω v bode F ($F\neq E$). Dokážte, že body C, F, I, J ležia na jednej kružnici. (*Kamil Duszenko*)

4. Daný je pravouhlý trojuholník ABC s preponou AB a bod P ležiaci vnútri kratšieho oblúka AC kružnice opísanej trojuholníku ABC. Kolmica na priamku CP prechádzajúca bodom C pretína priamky AP, BP postupne v bodoch K, L. Dokážte, že pomer obsahov trojuholníkov BKL a ACP nezávisí od polohy bodu P. (*Tomáš Jurík*)

5. Mesto Mar del Plata má tvar štvorca $WSEN$ a je rozdelené $2(n+1)$ ulicami na $n\times n$ blokov, pričom n je dané párne číslo (ulice vedú aj po obvode štvorca). Každý blok má rozmer 100×100 metrov. Všetky ulice v Mar del Plata sú jednosmerné, majú rovnaký smer v celej svojej dĺžke a susedné rovnobežné ulice majú vždy opačný smer. Ulicou WS sa jazdí v smere z W do S a ulicou WN sa jazdí z W do N. V bode W štartuje polievacie auto. Chce sa dostať do bodu E a poliať pritom čo najviac ciest. Aká je dĺžka najdlhšej trasy, ktorú môže prejsť, ak po žiadnom 100-metrovom úseku nechce ísť viac ako raz? (Na obrázku je pre $n=6$ znázornený plán mesta a jedna z možných – nie však najdlhších – trás polievacieho auta. Poz. tiež http://goo.gl/maps/JAzD.) (*Peter Novotný*)



Obr. 1

6. Kladné reálne čísla a, b, c, d spĺňajú podmienky
$$abcd=4,\qquad a^2+b^2+c^2+d^2=10.$$
Určte najväčšiu možnú hodnotu výrazu $ab+bc+cd+da$. (*Ján Mazák*)