2008/2009
58. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 14. – 21. 7. 2009.*)

1. Nech n je kladné celé číslo a $a_1, \dots, a_k$ $(k \geqq 2)$ sú navzájom rôzne celé čísla z množiny $\{1, \dots, n\}$ také, že n je deliteľom čísla $a_i(a_{i+1} - 1)$ pre $i = 1, \dots, k - 1$. Dokážte, že n nie je deliteľom čísla $a_k(a_1 - 1)$. (*Austrália*)

2. Daný je trojuholník ABC so stredom opísanej kružnice O. Nech P resp. Q je vnútorný bod strany CA resp. AB. Označme postupne K, L, M stredy úsečiek BP, CQ, PQ a Γ kružnicu prechádzajúcu bodmi K, L, M. Predpokladajme, že priamka PQ sa dotýka kružnice Γ. Dokážte, že $|OP| = |OQ|$. (*Rusko*)

3. Predpokladajme, že $s_1, s_2, s_3, \dots$ je rastúca postupnosť kladných celých čísel taká, že obe jej podpostupnosti

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \qquad \text{a} \qquad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

sú aritmetické. Dokážte, že potom aj postupnosť $s_1, s_2, s_3, \dots$ je aritmetická. (*USA*)

4. Daný je trojuholník ABC, pričom $|AB| = |AC|$. Osi uhlov CAB a ABC pretínajú strany BC a CA postupne v bodoch D a E. Nech K je stred kružnice vpísanej do trojuholníka ADC. Predpokladajme, že $|\measuredangle BEK| = 45°$. Nájdite všetky možné veľkosti uhla CAB. (*Belgicko*)

5. Určte všetky také funkcie f z množiny kladných celých čísel do množiny kladných celých čísel, že pre všetky kladné celé čísla a, b existuje nedegenerovaný trojuholník so stranami dĺžok

$$a, \quad f(b), \quad f(b + f(a) - 1).$$

(Trojuholník je *nedegenerovaný*, ak jeho vrcholy neležia na jednej priamke.)
(*Francúzsko*)

6. Nech $a_1, a_2, \dots, a_n$ sú navzájom rôzne kladné celé čísla a M je množina $n - 1$ kladných celých čísel neobsahujúca číslo $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Lúčny koník skáče pozdĺž číselnej osi, pričom začína v bode 0 a urobí smerom doprava n skokov s dĺžkami $a_1, a_2, \dots, a_n$ v nejakom poradí. Dokážte, že poradie skokov sa dá zvoliť tak, aby lúčny koník nepristál na žiadnom čísle z množiny M. (*Rusko*)