**2011/2012**
**61. ročník MO** *Zadania úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia juniorov*

(*Súťaž sa konala 20. – 23. 5. 2012.*)

**Súťaž jednotlivcov:**

**I-1.** Nech $P$ je bod ležiaci vnútri trojuholníka $ABC$. Body $K$, $L$, $M$ sú obrazmi bodu $P$ v stredovej súmernosti postupne podľa stredov strán $BC$, $CA$, $AB$. Dokážte, že priamky $AK$, $BL$, $CM$ sa pretínajú v jednom bode. (*Jaroslav Švrček*)

**I-2.** Nájdite všetky trojice prvočísel $(a, b, c)$ spĺňajúcich rovnosť

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + 3.$$

(*Poľsko*)

**I-3.** Na kružnici so stredom $O$ sú zvolené štyri rôzne body $A$, $B$, $C$, $D$, pričom

$$|\sphericalangle AOB| = |\sphericalangle BOC| = |\sphericalangle COD| = 60^\circ.$$

Nech $P$ je ľubovoľný bod ležiaci na kratšom oblúku $BC$ danej kružnice. Body $K$, $L$, $M$ sú päty kolmíc spustených z bodu $P$ postupne na priamky $AO$, $BO$, $CO$. Dokážte, že

a) trojuholník $KLM$ je rovnostranný,
b) obsah trojuholníka $KLM$ nezávisí od polohy bodu $P$ na kratšom oblúku $BC$.

(*Poľsko*)

**I-4.** Dokážte, že ak zvolíme ľubovoľných 51 vrcholov pravidelného 101-uholníka, tak niektoré tri zo zvolených bodov budú vrcholmi rovnoramenného trojuholníka. (*Jaromír Šimša*)

**I-5.** Nech $a$, $b$, $c$ sú kladné celé čísla spĺňajúce $a^2 + b^2 = c^2$. Dokážte, že číslo $\frac{1}{2}(c - a)(c - b)$ je druhou mocninou celého čísla. (*Poľsko*)

**Súťaž družstiev:**

**T-1.** Na tabuli je napísaných niekoľko rôznych reálnych čísel. Vieme, že hodnota súčinu ľubovoľných dvoch rôznych čísel z tabule je tiež napísaná na tabuli. Určte, koľko najviac čísel môže byť napísaných na tabuli. (*Ján Mazák*)

**T-2.** Na kružnici $k$ sú dané body $A$ a $B$, pričom $AB$ nie je priemerom kružnice $k$. Bod $C$ sa pohybuje po dlhšom oblúku $AB$ kružnice $k$ tak, že trojuholník $ABC$ je ostrouhlý. Nech $D$ je päta výšky z vrcholu $A$ na stranu $BC$ a $E$ je päta výšky z $B$ na $AC$. Ďalej nech $F$ je päta kolmice z bodu $D$ na priamku $AC$ a $G$ je päta kolmice z $E$ na $BC$.

a) Dokážte, že priamky $AB$ a $FG$ sú rovnobežné.
b) Určte množinu stredov $S$ úsečiek $FG$ prislúchajúcim ku všetkým prípustným polohám bodu $C$.

(*Ján Mazák*)

**T-3.** Udowodnij, że jeśli $n$ jest dodatnią liczbą całkowitą, to liczba $2(n^2 + 1) - n$ nie jest kwadratem liczby całkowitej. (*Poľsko*)

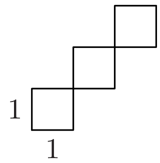
**T-4.** Dany jest romb $ABCD$, w którym $\measuredangle BAD = 60°$. Punkt $P$ leży wewnątrz rombu, przy czym spełnione sš równości $BP = 1$, $DP = 2$, $CP = 3$. Wyznacz długość odcinka $AP$. (*Poľsko*)

**T-5.** Určete všechny trojice $(a, k, m)$ kladných celých čísel, které vyhovují rovnici

$$k + a^k = m + 2a^m.$$

(*Poľsko*)

**T-6.** Šachovnicovou desku $8 \times 8$ máme pokrýt pomocí rovinných útvarů stejných jako na obr. 1 (každý z útvarů můžeme otočit o $90°$) tak, že se žádné dva nepřekrývají ani nepřesahuji přes okraj šachovnice. Určete, jaký největší možný počet polí této šachovnice můžeme uvedeným způsobem pokrýt. (*Poľsko*)




Obr. 1