2012/2013
62. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie A*

(*Termín odovzdania: v pondelok 3. decembra 2012.*)

1. Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré existuje prirodzené číslo a také, že

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$

(*Ján Mazák, Róbert Tóth*)

2. Dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ sa zvonka dotýkajú a ležia vo štvorci $ABCD$ so stranou a tak, že k_1 se dotýka strán AD a CD a k_2 sa dotýka strán BC a CD. Dokážte, že aspoň jeden z trojuholníkov AS_1S_2, BS_1S_2 má obsah najviac $\frac{3}{16}a^2$. (*Tomáš Jurík*)

3. Označme $p(n)$ počet všetkých n-ciferných čísel zložených len z cifier 1, 2, 3, 4, 5, v ktorých sa každé dve susedné cifry líšia aspoň o 2. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí

$$5 \cdot 2{,}4^{n-1} \leqq p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

(*Pavel Novotný*)

4. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky nenulové čísla x, y platí

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x).$$

(*Pavel Calábek*)

5. Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Kružnica, ktorá prechádza vrcholom B a dotýka sa priamky AI v bode I, pretína strany AB, BC postupne v bodoch P, Q. Priesečník priamky QI so stranou AC označme R. Dokážte, že platí

$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

6. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 y &= \operatorname{tg}^2 z,\\
\sin^2 y + \cos^2 z &= \operatorname{tg}^2 x,\\
\sin^2 z + \cos^2 x &= \operatorname{tg}^2 y.
\end{aligned}$$

(*Pavel Calábek*)