2012/2013
62. ročník MO *Zadania úloh domáceho kola kategórie B*

(*Termín odovzdania: v pondelok 14. januára 2013.*)

1. Určte všetky trojice (a, b, c) prirodzených čísel, pre ktoré platí

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

(*Jaroslav Švrček*)

2. V obore reálnych čísel riešte rovnicu

$$x^3 + (3\sqrt{2} - 2)x^2 - (1 + \sqrt{2})x - 14(\sqrt{2} - 1) = 0,$$

ak viete, že má aspoň jeden celočíselný koreň. Prípadné iracionálne korene zapíšte v jednoduchom tvare bez odmocnín z iracionálnych čísel. (*Jaromír Šimša*)

3. Nech V je priesečník výšok ostrouhlého trojuholníka ABC. Priamka CV je spoločnou dotyčnicou kružníc k a l, ktoré sa zvonka dotýkajú v bode V a pritom každá z nich prechádza jedným z vrcholov A a B. Ich priesečníky s vnútrami strán AC a BC označme P a Q. Dokážte, že polpriamka VC je osou uhla PVQ a že body A, B, P, Q ležia na jednej kružnici. (*Jaroslav Švrček*)

4. Nájdite najmenšiu hodnotu zlomku

$$V(n) = \frac{n^3 - 10n^2 + 17n - 4}{n^2 - 10n + 18},$$

pričom n je ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako 2. (*Vojtech Bálint*)

5. V rovine je daná úsečka AB. Pre ľubovoľný bod X tejto roviny, ktorý je rôzny od A aj B, označme X_A, resp. X_B obraz bodu A, resp. B v osovej súmernosti podľa priamky XB, resp. XA. Nájdite všetky také body X, ktoré spolu s bodmi X_A, X_B tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka. (*Pavel Calábek*)

6. Je dané prirodzené číslo $k < 12$. Vo vrcholoch pravidelného 12-uholníka sú napísané čísla $1, 2, \ldots, 12$ (ako na ciferníku hodín). V jednom kroku môžeme buď vymeniť niektoré dve protiľahlé čísla, alebo zvoliť ľubovoľných k susedných vrcholov a v nich napísané čísla zväčšiť o 1. Označme $T(k)$ nasledovné tvrdenie: „Po konečnom počte krokov možno dostať všetkých 12 čísel rovnakých.“ Dokážte, že $T(2)$ neplatí, $T(5)$ platí, a rozhodnite o platnosti $T(3)$. (*Ján Mazák*)