**2007/2008**
**57. ročník Matematickej olympiády** *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 15. – 21. 7. 2008.*)

**1.** V ostrouhlom trojuholníku $ABC$ označme $H$ priesečník jeho výšok. Kružnica so stredom v strede strany $BC$ prechádzajúca bodom $H$ pretína priamku $BC$ v bodoch $A_1$ a $A_2$. Podobne kružnica so stredom v strede strany $CA$ predchádzajúca bodom $H$ pretína priamku $CA$ v bodoch $B_1$ a $B_2$ a kružnica so stredom v strede strany $AB$ predchádzajúca bodom $H$ pretína priamku $AB$ v bodoch $C_1$ a $C_2$. Dokážte, že body $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$, $C_1$, $C_2$ ležia na jednej kružnici. (*Rusko*)

**2.** a) Dokážte, že

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geqq 1$$

pre všetky reálne čísla $x$, $y$, $z$ rôzne od 1 spĺňajúce $xyz=1$.
b) Dokážte, že v uvedenej nerovnosti platí rovnosť pre nekonečne veľa trojíc racionálnych čísel $x$, $y$, $z$ rôznych od 1 spĺňajúcich $xyz=1$. (*Rakúsko*)

**3.** Dokážte, že existuje nekonečne veľa kladných celých čísel $n$ takých, že $n^2+1$ má prvočíselného deliteľa väčšieho ako $2n+\sqrt{2n}$. (*Litva*)

**4.** Nájdite všetky funkcie $f\colon (0,\infty)\to(0,\infty)$ (t. j. funkcie z kladných reálnych čísel do kladných reálnych čísel) také, že

$$\frac{f^2(w)+f^2(x)}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

pre všetky kladné reálne čísla $w$, $x$, $y$, $z$ spĺňajúce $wx=yz$. (*Južná Kórea*)

**5.** Nech $n$ a $k$ sú kladné celé čísla, kde $k\geqq n$ a $k-n$ je párne číslo. Daných je $2n$ lámp označených $1, 2, \ldots, 2n$, pričom každá z nich môže byť buď *zapnutá* alebo *vypnutá*. Na začiatku sú všetky lampy vypnuté. Uvažujeme postupnosti *krokov*: v každom kroku jednu z lámp prepneme (zo zapnutej na vypnutú alebo z vypnutej na zapnutú).

Nech $N$ je počet takých postupností pozostávajúcich z $k$ krokov, ktoré vedú do stavu, že všetky lampy od 1 po $n$ sú zapnuté a všetky lampy od $n+1$ po $2n$ sú vypnuté.

Nech $M$ je počet takých postupností pozostávajúcich z $k$ krokov, ktoré vedú do stavu, že všetky lampy od 1 po $n$ sú zapnuté a všetky lampy od $n+1$ po $2n$ sú vypnuté, pričom žiadna z lámp od $n+1$ po $2n$ nebola nikdy zapnutá.

Určte podiel $N/M$. (*Francúzsko*)

**6.** Nech $ABCD$ je konvexný štvoruholník, pričom $|BA|\neq|BC|$. Označme postupne $\omega_1$ a $\omega_2$ kružnice vpísané do trojuholníkov $ABC$ a $ADC$. Predpokladajme, že existuje kružnica $\omega$ dotýkajúca sa polpriamky $BA$ za bodom $A$ a polpriamky $BC$ za bodom $C$, ktorá sa dotýka aj priamok $AD$ a $CD$. Dokážte, že spoločné vonkajšie dotyčnice kružníc $\omega_1$ a $\omega_2$ sa pretínajú na kružnici $\omega$. (*Rusko*)