SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA NA STREDNÝCH ŠKOLÁCH

62. ročník, školský rok 2012/2013

Domáce kolo

Kategórie A, B, C – zadania úloh (maďarská verzia)

Milí žiaci stredných škôl,

Slovenská komisia Matematickej olympiády vás pozýva zúčastniť sa 62. ročníka Matematickej olympiády – súťaže pre žiakov stredných škôl v našej republike.

Kategória **A** je určená žiakom maturitných a predmaturitných ročníkov.
Kategória **B** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 2 roky.
Kategória **C** žiakom, ktorým zostávajú do maturity viac ako 3 roky.
Pre žiakov prvých, prípravných ročníkov bilingválnych gymnázií (s päťročným štúdiom) je určená kategória **Z9**.

Organizácia súťaže v kategóriách **A, B, C**:

V **domácom kole** na vás čaká **6 úloh**, ktoré nájdete v tomto letáku. Ich riešenia (nie nutne všetkých úloh) odovzdajte svojmu učiteľovi matematiky do **3. decembra 2012** (kategória **A**) a do **14. januára 2013** (kategórie **B** a **C**). Ten ich opraví, ohodnotí podľa stupnice 1 – *výborne*, 2 – *dobre*, 3 – *nevyhovuje*. Potom ich s vami rozoberie, vysvetlí vám prípadné nedostatky a oboznámi vás so správnym riešením. Ak budú vaše riešenia aspoň štyroch úloh ohodnotené ako výborné alebo dobré, budete pozvaní do **školského kola**. Tam budete v stanovenom čase samostatne riešiť ďalšie tri úlohy. Opravené riešenia školského aj domáceho kola úspešných riešiteľov školského kola potom váš učiteľ matematiky pošle na príslušnú krajskú komisiu MO. Tá na základe výsledkov pozve najlepších účastníkov školského kola do **krajského kola**, v ktorom budú v priebehu štyroch hodín samostatne riešiť štyri úlohy. O poradí v krajských kolách rozhoduje súčet bodov získaných za jednotlivé úlohy. Napríklad ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X a práve traja žiaci (vrátane X) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X, tak žiakovi X patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skrátene len 6. miesto. Analogickým postupom určujeme umiestnenie všetkých žiakov. Žiadne iné kritériá nie sú prípustné.

V kategórii **A** budú ešte najlepší riešitelia krajského kola z celej republiky súťažiť v **celoštátnom kole**, kde budú dva dni (po 4,5 hodinách) riešiť dve trojice úloh. Z úspešných riešiteľov celoštátneho kola sa (na výberovom sústredení) vyberá družstvo Slovenskej republiky na Medzinárodnú matematickú olympiádu (ktorá bude v júli 2013 v Kolumbii), na medzištátne stretnutie s Českou republikou a Poľskom (bude v júni 2013 v Českej rep.) a na Stredoeurópsku matematickú olympiádu (bude v auguste 2013 v Maďarsku).

Pre najlepších riešiteľov MO kategórie **C** sa v máji 2013 v Poľsku uskutoční Česko-poľsko-slovenské stretnutie juniorov. Výber slovenského družstva prebehne nasledovne: Riešenia najlepších riešiteľov krajského kola kategórie C budú centrálne zozbierané a jednotne ohodnotené. Podľa poradia po tomto ohodnotení budú oslovení prví šiesti s ponukou účasti na súťaži v Poľsku (v prípade rovnosti bodov sa ako doplňujúce kritérium môže brať do úvahy účasť vo vyššej kategórii MO, účasť v korešpondenčnom seminári, či účasť v Z9 v predošlom šk. roku).

Termíny 62. ročníka Matematickej olympiády:

	školské kolo	krajské kolo	celoštátne kolo
Kategória A	11. 12. 2012	15. 01. 2013	17. – 20. 03. 2013
Kategórie B, C	24. 01. 2013	09. 04. 2013	—

Matematickú olympiádu vyhlasuje *Ministerstvo školstva, vedy, výskumu a športu SR* v spolupráci s *Jednotou slovenských matematikov a fyzikov* a *Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.* Súťaž riadi *Slovenská komisia MO* a v krajoch ju riadia *krajské komisie MO.* Na jednotlivých školách ju zaisťujú učitelia matematiky. Vy sa obracajte na svojho učiteľa matematiky. Celoštátne kolo MO, tlač materiálov MO a ich distribúciu po organizačnej stránke zabezpečuje IUVENTA v tesnej súčinnosti so Slovenskou komisiou Matematickej olympiády.

Riešenia súťažných úloh vypracujte čitateľne na listy formátu A4. Každú úlohu začnite na novom liste a uveďte vľavo hore záhlavie podľa vzoru:

```
Emil Kruh
I.C, Gymnázium L. Eulera, Okrúhle nám. 5, 940 01 Nové Zámky
Kraj Nitra
2012/2013
C - I - 3
```

Posledný údaj je označenie úlohy podľa tohto letáka. Zadania úloh nemusíte opisovať. Ak sa vám riešenie nezmestí na jeden list, uveďte na ďalších listoch vľavo hore svoje meno a označenie úlohy a strany očíslujte. **Riešenie píšte ako výklad, v ktorom sú uvedené všetky podstatné úvahy tak, aby bolo možné sledovať váš myšlienkový postup.**

Veľa radosti z úspešného riešenia úloh vám všetkým praje

Mgr. Peter Novotný, PhD.
predseda Slovenskej komisie MO

Informácie o MO a archív zadaní a riešení úloh nájdete na internetových stránkach:
`http://www.olympiady.sk` `http://skmo.sk` `http://matematika.okamzite.eu`
`http://fpedas.uniza.sk/~novotny/MO.htm` `http://www.imo-official.org`

Radi by sme upozornili učiteľov a žiakov na Korešpondenčný matematický seminár (KMS) organizovaný združením Trojsten. Táto súťaž je veľmi efektívnou formou prípravy na MO a tiež zdokonaľovania sa v matematickom myslení ako takom. K tomu prispievajú aj záverečné sústredenia pre najlepších riešiteľov. Pre riešiteľov MO kategórií B a C je v KMS určená kategória ALFA. Pre lepších a skúsenejších z kategórie B a pre kategóriu A je kategória BETA. Pre tých, ktorí majú ambície uspieť na celoštátnom kole MO kategórie A, je určený korešpondenčný seminár *i*KS, ktorý organizuje KMS v spolupráci s Matematickým korešpondenčným seminárom v Prahe. Viac informácií o KMS a o *i*KS nájdete v priloženom samostatnom letáku, prípadne na `http://kms.sk` a `http://kms.sk/iks`.

Na ďalšiu spoluprácu sa tešia

Bc. Jozef Jakubík, Filip Sládek

A KATEGÓRIA

A – I – 1

Keresd meg az összes p, q prímszámokból álló párost, amelyre létezik olyan a természetes szám, hogy fennáll a

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}$$

egyenlőség! (*Ján Mazák, Róbert Tóth*)

A – I – 2

A $k_1(S_1, r_1)$ és $k_2(S_2, r_2)$ egymást kívülről érintő körvonalak az a oldalú $ABCD$ négyzet belsejében fekszenek úgy, hogy k_1 az AD és CD oldalakat, k_2 pedig a BC és CD oldalakat érinti. Bizonyítsd be, hogy az AS_1S_2 és BS_1S_2 háromszögek közül legalább az egyiknek a területe legfeljebb $\frac{3}{16}a^2$. (*Tomáš Jurík*)

A – I – 3

Jelölje $p(n)$ az összes olyan n-jegyű számok számát, amelyek csak az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyeket tartalmazzák, és a szomszédos helyeken levő számjegyek különbsége legalább 2. Bizonyítsd be, hogy az összes n természetes számra érvényes:

$$5 \cdot 2{,}4^{n-1} \leqq p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

(*Pavel Novotný*)

A – I – 4

Keresd meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ függvényt amelyre az összes nullától különböző x, y számokra fennáll az

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x)$$

egyenlőség! (*Pavel Calábek*)

A – I – 5

Jelölje I az ABC háromszög beírt körének középpontját. A B ponton áthaladó, AI egyenest I pontban érintő körvonal az AB és BC oldalakat rendre a P és Q pontokban metszi. Jelölje R a QI egyenes AC oldallal való metszéspontját. Bizonyítsd be, hogy

$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

A – I – 6

A valós számok halmazán oldd meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 y &= \operatorname{tg}^2 z,\\
\sin^2 y + \cos^2 z &= \operatorname{tg}^2 x,\\
\sin^2 z + \cos^2 x &= \operatorname{tg}^2 y.
\end{aligned}$$

(*Pavel Calábek*)

B KATEGÓRIA

B – I – 1

Keresd meg az összes természetes számokból álló (a, b, c) számhármast, amelyre fennáll a

$$2^a + 4^b = 8^c$$

egyenlőség! (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 2

A valós számok halmazán oldd meg az

$$x^3 + (3\sqrt{2} - 2)x^2 - (1 + \sqrt{2})x - 14(\sqrt{2} - 1) = 0$$

egyenletet, ha tudod, hogy legalább az egyik gyöke egész szám. Az esetleges irracionális gyököket olyan egyszerű alakban írd fel, hogy gyökjel alatt ne szerepeljen irracionális szám.

(*Jaromír Šimša*)

B – I – 3

Legyen V egy élesszögű ABC háromszög magasságvonalainak metszéspontja. A CV egyenes közös érintője a k ill. l körvonalaknak, melyek egymást kívülről a V pontban érintik, valamint áthaladnak az A, ill. B pontokon. Ezen körvonalak az AC ill. BC oldalakat a P, ill. Q belső pontokban metszik. Bizonyítsd be, hogy a VC félegyenes a PVQ szög szögfelezője, valamint, hogy az A, B, P és Q pontok egy körvonalon fekszenek! (*Jaroslav Švrček*)

B – I – 4

Keresd meg a

$$V(n) = \frac{n^3 - 10n^2 + 17n - 4}{n^2 - 10n + 18}$$

tört lehető legkisebb értékét, ha n kettőtől nagyobb természetes szám! (*Vojtech Bálint*)

B – I – 5

A síkban adott az AB szakasz. Legyen X tetszőleges A-tól és B-től különböző pontja ennek a síknak. Jelölje rendre X_A, ill. X_B az A ill. B pontok XB, ill. XA egyenesek általi tengelyes tükrözésben kapott képét. Keresd meg az összes olyan X pontot, hogy az X, X_A, X_B pontok egy egyenlő oldalú háromszög csúcsai legyenek. (*Pavel Calábek*)

B – I – 6

Adott a $k < 12$ természetes szám. Egy szabályos 12-szög csúcsaiba felírtuk az $1, 2, \ldots, 12$ számokat (ahogy a falióra számlapján). Egy lépésben vagy kicserélünk két átellenes számot, vagy kiválasztunk k darab szomszédos csúcsot és a rajtuk szereplő számokat eggyel növeljük. Jelölje $T(k)$ a következő állítást: „Véges sok lépés után elérhető, hogy mind a 12 szám egyforma legyen.“ Bizonyítsd be, hogy $T(2)$ nem igaz, $T(5)$ igaz, valamint állapítsd meg $T(3)$ érvényességét!

(*Ján Mazák*)

****

C KATEGÓRIA

C – I – 1

Egy négyzetháló 16×16 mezőt tartalmaz. Egy szöcske két irányban ugrál rajta: jobbra, vagy lefelé, miközben felváltva az ugrások hosszúsága kettő, ill. három (azaz az egymás után következő ugrások különböző hosszúságúak). A bal felső sarokból indul, és az első lépés hossza kettő. Hányféle úton juthat el a jobb alsó sarokba? (Út alatt az ugrások sorozatát értjük.)

(*Peter Novotný*)

C – I – 2

Az a, b, c, d pozitív valós számokra fennáll az

$$a + b = c + d, \qquad ad = bc, \qquad ac + bd = 1$$

egyenletrendszer. Mennyi az $a + b + c + d$ kifejezés lehető legnagyobb értéke? (*Ján Mazák*)

C – I – 3

Adott az o kerületű $ABCD$ téglalap. E téglalap síkjában keresd meg azon pontok halmazát, amelyekre az AB, BC, CD, DA egyenesektől mért távolságaik összege pontosan $\frac{2}{3}o$.

(*Tomáš Jurík*)

C – I – 4

Határozd meg, hogy igaz-e a következő állítás: „Egy szabályos 19-szög csúcsai közül tetszőlegesen kiválasztott hét csúcs között mindig található négy olyan, amelyek egy trapézt alkotnak.“

(*Jaromír Šimša*)

C – I – 5

Keresd meg az összes olyan n egész számot, amelyre $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ prímszám!

(*Jaroslav Švrček*)

C – I – 6

Egy $30\,\text{cm}^2$ területű szabályos $ABCDEF$ hatszög belsejében felvettünk egy M pontot. Az ABM és BCM háromszögek területe rendre $3\,\text{cm}^2$, ill. $2\,\text{cm}^2$. Határozd meg az CDM, DEM, EFM és FAM háromszögek területét! (*Pavel Leischner*)

SLOVENSKÁ KOMISIA MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

62. ROČNÍK MATEMATICKEJ OLYMPIÁDY

Leták kategórií A, B, C – domáce kolo

Autori úloh: doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Pavel Calábek, PhD., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., Mgr. Pavel Leischner, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD., doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc., doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc., RNDr. Jaroslav Švrček, CSc., Róbert Tóth

Recenzenti:	doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc., RNDr. Tomáš Jurík, PhD., RNDr. Ján Mazák, PhD., Mgr. Peter Novotný, PhD., doc. RNDr. Pavel Novotný, CSc.
Redakčná úprava:	Mgr. Peter Novotný, PhD.
Preklad:	Mgr. Štefan Gyürki, PhD., doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012

Korešpondenčný matematický seminár

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, Univerzita Komenského

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Jednota slovenských matematikov a fyzikov

Milí študenti, učitelia a ostatní matematickí nadšenci!

Dostávate do rúk úvodný leták letnej časti 34. ročníka Korešpondenčného Matematického Seminára (KMS). Táto súťaž organizovaná občianskym združením Trojsten na pôde Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave (FMFI UK) je pre stredoškolákov jedinečnou príležitosťou na zdokonalenie svojich matematických schopností a logického myslenia. Zručnosti a skúsenosti získané pri riešení tohto seminára, prípadne pri účasti na záverečnom sústredení, sú veľmi cennou devízou aj pri riešení Matematickej olympiády (MO). Mladším a začínajúcim študentom je určená kategória ALFA, pre starších a skúsenejších je kategória BETA. Každý môže, samozrejme v rámci svojich možností, riešiť obidve kategórie. Podrobnejšie informácie o jednotlivých kategóriách nájdete v pravidlách. Pre tých, čo majú vyššie ambície a chceli by uspieť na celoštátnom kole MO-A je určený nový seminár *i*KS (Medzinárodný korešpondenčný seminár), ktorý organizujú vedúci KMS v spolupráci s českými kolegami z Matematického korespondenčního semináře. Tento seminár má veľmi špecifický cieľ, ktorým je príprava študentov na CK MO-A a aj na Medzinárodnú matematickú olympiádu. Ak máte akékoľvek otázky alebo pripomienky, smelo nás kontaktujte e-mailom na adrese `kms@kms.sk`, prípadne ich pošlite písomne na adresu uvedenú pod zadaniami.

Veľa úspechov a radosti z riešenia vám želajú

vaši organizátori

Pravidlá KMS

Všeobecné informácie o korešpondenčnom matematickom seminári

Súťaž sa skladá z dvoch nezávislých častí – zimnej a letnej. Každá z nich prebieha v rámci školského polroka. Na konci každej časti budú najúspešnejší riešitelia pozvaní na záverečné sústredenie. Každá časť pozostáva z troch sérií úloh. Zadania prvých dvoch sérií máte pred sebou a zadania tretej pošleme tým, ktorí nám pošlú prihlášku. Úlohy budú obodované počtom bodov od 0 po 9. Body sa pritom udeľujú aj za čiastkové či neúplné riešenia. Za každú sériu sa riešiteľovi do poradia započíta 5 úloh s najväčším bodovým ziskom.

Kategória ALFA

Kategóriu ALFA môžu riešiť len študenti stredných škôl, ktorí sa nezúčastnili celoštátneho kola matematickej olympiády a ktorých koeficient k_α je najviac 3.

Tento koeficient si môžeš vypočítať ako $k_\alpha = r + u$, kde číslo r je tvoj ročník a číslo u je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) pred začiatkom tohoto semestra. Semester považuj za úspešný, ak sa ti počas neho podarilo získať pozvánku na sústredenie KMS, alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 1 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\alpha \leq 1$ a úlohu číslo 2 len študenti s $k_\alpha \leq 2$. Ostatné úlohy $(3-7)$ môžu riešiť všetci riešitelia kategórie ALFA.

V tejto kategórii sa bude zostavovať päť regionálnych výsledkových listín, a to pre regióny východné Slovensko, stredné Slovensko, západné Slovensko, Bratislava a zahraničie. Na záverečné sústredenie bude zvyčajne pozvaných 5 najúspešnejších riešiteľov z každého regiónu Slovenska, ďalších aspoň 5 podľa celkového bodového zisku a najúspešnejší riešitelia Matematickej olympiády. Ďalší riešitelia v poradí budú na sústredenie pozvaní ako náhradníci. Víťazi slovenských regiónov budú odmenení hodnotnými vecnými cenami. Žiaci základných škôl nebudú na sústredenie pozvaní.

Kategória BETA

Kategóriu BETA môžu riešiť všetci (aj zahraniční) študenti stredných škôl. Riešitelia ALFY sa vo výsledkovej listine BETY objavia až po sérii, v ktorej pošlú aspoň jednu z úloh 8, 9, 10 alebo 11.

Svoj koeficient k_β si vyrátaš nasledovne: $k_\beta = o + u_\beta$, kde číslo o je súčet počtu tvojich účastí na celoštátnom kole matematickej olympiády a počtu tvojich umiestnení medzi uspešnými riešiteľmi tohoto kola. Číslo u_β je počet tvojich úspešných semestrov (polrokov) v kategórii BETA, teda tých, za ktoré si bol pozvaný na sústredenie KMS kategórie BETA alebo si sa ho zúčastnil ako náhradník.

Úlohu číslo 5 môžu súťažne riešiť len študenti s $k_\beta = 0$ a úlohu číslo 6 len študenti s $k_\beta \leq 2$. Ostatné úlohy $(7 - 11)$ môžu riešiť všetci riešitelia.

V tejto kategórii sa bude zostavovať jedna spoločná výsledková listina. Na záverečné sústredenie bude pozvaných aspoň 30 najúspešnejších riešiteľov (z toho najviac 10 zahraničných), ďalší v poradí budú pozvaní ako náhradníci. Prví piati budú odmenení hodnotnými vecnými cenami.

Spoločné pre obe kategórie

- Príklady rieš samostatne. Riešenie každej úlohy riadne zdôvodni. V prípade, že v časti či celom riešení používaš odbornú literatúru, uveď jej názov, autora, vydavateľstvo, rok vydania a stranu. Samozrejme, aj v tomto prípade zašli kompletné riešenie. Za riešenie využívajúce výpočtovú techniku spravidla nedostaneš veľa bodov.
- Riešenia posielaj do termínu odoslania série. Ak posielaš riešenia z územia mimo Slovenskej republiky, treba to stihnúť do uvedeného zahraničného termínu. Riešenia odoslané po termíne odoslania (rozhodujúca je pečiatka na obálke) spôsobujú značné organizačné problémy, vyhradzujeme si preto právo udeliť nula bodov za všetky riešenia odoslané po termíne.
- Za riešenie odoslané po termíne sa považuje aj akékoľvek riešenie odovzdané organizátorom osobne.
- Riešenie každého príkladu píš na samostatný papier formátu A4. Ku každému príkladu uveď svoje meno, triedu, školu a adresu! Vítané sú aj riešenia v angličtine a češtine a riešenia písané v TEXu. Z organizačných dôvodov nebudú opravované riešenia písané v iných jazykoch.
- Opravené, obodované a okomentované riešenia spolu so vzorovými riešeniami a prípadnou ďalšou korešpondenciou Ti môžu byť zasielané domov, do školy alebo na inú adresu. Svoju voľbu vyznač v návratke. V prípade, ak chceš korešpondenciu posielať inde ako do školy, je potrebné zaslať nám s návratkou aj tri obálky (najlepšie formátu A5) s vypísanou adresou (známky nie sú potrebné).
- Nedodržanie týchto pravidiel bude viesť k postihu.
- Pokiaľ máš dojem, že tvoje riešenie bolo nesprávne obodované, pošli čo najskôr písomnú sťažnosť. Nezabudni k nej priložiť aj originál sporného riešenia.
- Ak ti nie je v zadaniach čokoľvek jasné, alebo máš akékoľvek pochybnosti, netreba sa báť spýtať sa nás. Ideálny spôsob je zaslanie e-mailu na `kms@kms.sk`, prípadne listu na známu adresu KMS, OATČ KAGDM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava.

Elektronické posielanie riešení

Presný návod na ich odovzdávanie nájdeš po prihlásení na stránke `kms.sk/eriesenia`. Pre elektronické posielanie riešení platia nasledovné pravidlá.

- Termín na odovzdanie je vždy v deň termínu odoslania série o **17:00**. Po tomto čase už elektronické posielanie nie je možné. Tento jednotný termín sa týka aj zahraničných riešiteľov.
- Akceptované sú iba riešenia vo formáte pdf. Pri ich tvorbe je ideálne použiť TEX, prípadne export do formátu pdf z iných aplikácií.
- Na stránke `kms.sk/eriesenia` je možné (po prihlásení) vyplniť **elektronickú prihlášku**. Nebudeš ju tak musieť zasielať písomne. Je však potrebné (v prípade posielania korešpondencie inde ako do školy) zaslať nám obálky ako doteraz. Opravené príklady sa Ti totiž budú späť posielať klasickým spôsobom.

Náboj KMS

Aj v tomto školskom roku sa môžete tešiť na tradičnú matematickú súťaž – Náboj KMS. Podrobnejšie informácie nájdete onedlho na stránke `kms.sk/naboj` a budú tiež zaslané na vašu školu.

Prednášky

Riešiteľom z celého Slovenska odporúčame navštíviť Klub Trojstenu, ktorý sa uskutoční v Bratislave dňa 10. novembra 2012 (po Náboji FKS). Bližšie informácie nájdete v pozvánke, ktorú čoskoro zašleme vám alebo na vašu školu, a tiež na internetovej stránke `www.fks.sk/klub`.

Riešiteľom z okolia Žiliny odporúčame navštíviť Matematický klub (MaK). Ďalšie informácie môžete nájsť na stránke `www.sezam.sk`.

.... TU ODSTRIHNI !!! ....

Prihláška do letnej časti KMS 2012/2013 – **poslať spolu s 1. sériou alebo vyplniť na** `kms.sk/eriesenia`**!**

Meno a priezvisko: .... Dátum narodenia: ....
Škola: ....
Trieda ....
Počet účastí na celoštátnom kole MO: ...., z ktorých bolo .... úspešných
Adresa domov: ....
Adresa pre poštu (domov – internát – škola): ....
Tel. domov: .... mobil (vlastný): ....
e-mail: ....

Pozor! Podmienkou posielania korešpondencie domov je zaslanie 3 obálok A5 s adresami!

Zadania 1. série zimnej časti KMS 2012/2013

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
Po ceste prešlo dokopy 19 motoriek a áut. Keby prešlo o štyri autá menej, bolo by ich toľko ako dvojnásobok počtu motoriek, ktoré prešli. Koľko prešlo po ceste áut a koľko motoriek?

Úloha č. 2:
Aká cifra je na 7000. mieste za desatinnou čiarkou v čísle $\frac{1}{7000}$?

Úloha č. 3:
Určte počet všetkých trojciferných čísel, ktoré sú devätnásťkrát väčšie ako ich ciferný súčet.

Úloha č. 4:
Turnaja vo futbale sa zúčastnilo N družstiev. Turnaj sa hral systémom každý s každým. Najviac koľko družstiev mohlo vyhrať aspoň polovicu zápasov, ak

a) N je nepárne?

b) N je párne?

Úloha č. 5:
Alibabova žena našla v zbojníckej jaskyni vrece s diamantmi. Diamantov bolo vo vnútri n, pričom prvý z nich vážil 1 g, druhý 2 g, ďalší 3 g, $\ldots$, posledný n gramov. Alibaba chcel, aby si diamanty rozdelili na dve časti, pričom tieto dve časti majú mať rovnakú hmotnosť. Pre aké n sa dá korisť rozdeliť?

Úloha č. 6:
Snehulienka má obdĺžnikovú záhradku s celočíselnými rozmermi x a y. Rozhodla sa zväčšiť si ju na rozmery $x + 5$ a $y + 6$. Týmto počinom sa jej záhradke trikrát zväčší obsah. Aké rozmery mohla záhradka pôvodne mať?

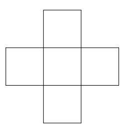
Úloha č. 7:
Cédečko má fóbiu z reálnych čísel a, b, c, x, y. Jeho strach je spôsobený tým, že platí $a^3+ax+y = 0$, $b^3+bx+y = 0$, $c^3 + cx + y = 0$ a navyše sú čísla a, b, c rôzne. Upokojí sa, iba ak sa dozvie, že súčet čísel a, b, c je nula. Dokážte, že sa nemá čoho báť.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Nech q je kladné racionálne číslo. Dieťaťom čísla q nazvime čísla $q + 1$ a $\frac{q}{q+1}$. Potomkami čísla q nazvime deti q a deti všetkých potomkov q. Ondro napísal na tabuľu všetkých potomkov čísla 1. Dokážte, že každé kladné racionálne číslo sa nachádza na tabuli práve raz.

Úloha č. 9:
Edo si pod vankúšom schováva nekonečný štvorčekový papier. Jednej noci ho navštívila zubná víla Stanka a zafarbila každý štvorček na tomto papieri jednou z jej piatich obľúbených farieb[1]. Edo si ráno všimol, že každý kríž z piatich štvorčekov (ako na obrázku) obsahuje každú farbu práve raz. Vzápätí si uvedomil, že potom aj každý obdĺžnik 5×1 musí obsahovať každú farbu práve raz. Prečo je to tak?



Úloha č. 10:
Filip písal na tabuľu pod seba čísla. Prvé a druhé číslo bolo 1. Každé ďalšie si vyrátal sčítaním dvoch predošlých a pripočítaním čísla 1. Prizerajúci sa Matúš sa zamyslel nad nasledujúcou otázkou: aké sú všetky dvojice prirodzených čísel (n, m) také, že n-té číslo na tabuli je tvaru $2^m - 1$?

[1]cyklaménová, lososová, fuchsiová, búrková modrá, biela

<u>Úloha č. 11:</u>
Podmnožina prirodzených čísel S sa nazýva *čarovná*, ak pre každé dva rôzne prvky i, j z tejto podmnožiny platí, že do množiny S patrí aj číslo

$$\frac{i+j}{\mathrm{NSD}(i,j)}.$$

Nájdite všetky čarovné množiny. Poznámka: $\mathrm{NSD}(i,j)$ označuje najväčšieho spoločného deliteľa čísel i, j.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Kategória **ALFA**, **BETA**: Termín odoslania riešení je **8. október 2012** (pre zahraničie 5. október 2012).

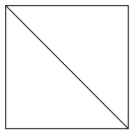
Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

Zadania 2. série zimnej časti KMS 2012/2013

Kategória ALFA

Úloha č. 1:
V trojuholníku ABC je $|\sphericalangle ACB| = 20°$. Na stranách BC, CA sú body D, E umiestnené tak, že $|\sphericalangle ADB| = 50°$ a $|\sphericalangle AEB| = 60°$. Úsečky AD a BE sa pretínajú v bode S. Zistite veľkosť uhla ASB.

Úloha č. 2:
Koľko najmenej zápaliek by vám stačilo k zostrojeniu predmetu, ktorý vypadá spredu (nárysu), zboku (bokorysu) aj zhora (pôdorysu) tak, ako je nakreslené na obrázku? Zápalky sa nesmú lámať. Nezabudnite zdôvodniť, prečo to s menej zápalkami nejde.



Úloha č. 3:
Majme štvorec $ABCD$. Nad stranou CD zostrojme rovnostranný trojuholník DCE (bod E leží mimo štvorca $ABCD$). Nad jeho stranou CE zostrojme ďalší rovnostranný trojuholník ECF. Teraz zostrojme rovnoramenný trojuholník CGF s pravým uhlom pri vrchole F (tak, aby sa posledné dva trojuholníky neprekrývali). Pokračujeme rovnoramenným trojuholníkom CGH s pravým uhlom pri vrchole G. Ležia A, B a H na jednej priamke? Svoju odpoveď poriadne zdôvodnite.

Úloha č. 4:
V priestore je daná rovina α a bod A, ktorý v nej neleží. Zostrojte rovinu β rovnobežnú s rovinou α tak, aby v nej ležal bod A. Použiť môžete:

- kružidlo — ak mu zadáte rovinu, bod v nej a polomer, tak zostrojí kružnicu v danej rovine, so stredom v danom bode a s daným polomerom,
- gulidlo — ak mu zadáte bod a polomer, tak zostrojí guľu so stredom v danom bode a s daným polomerom,
- pravítko — ak mu zadáte dva body, tak zostrojí priamku, ktorá prechádza oboma danými bodmi,
- rovnítko — ak mu zadáte tri body, ktoré neležia na jednej priamke, tak zostrojí rovinu v ktorej ležia všetky tri dané body.

Postup musí mať konečný počet krokov.

Úloha č. 5:
Dokážte, že v každom mnohostene existujú dve steny s rovnakým počtom hrán.

Úloha č. 6:
Koľko najviac stien môže mať teleso, ktoré vznikne spojením dvoch štvorstenov (štvorsteny môžu cez seba prechádzať)? Prečo ich nemôže byť viac?

Úloha č. 7:
Úsečky AB a CD majú dĺžku 1 a pretínajú sa v bode O. Uhol AOC má veľkosť $60°$. Dokážte, že $|AC| + |BD| \geq 1$.

Kategória BETA

Úlohy číslo **5, 6, 7** sú rovnaké ako v kategórii **ALFA**.

Úloha č. 8:
Máme konvexný štvoruholník z papiera. Kedy sa dá zložiť *pekne*? *Pekne* znamená, že existuje bod vnútri štvoruholníka, do ktorého keď zložíme vrcholy, dostaneme nový štvoruholník tvorený práve dvoma vrstvami papiera a to po celej jeho ploche.

Úloha č. 9:
V trojuholníku ABC platí $|CA| = |CB|$. Bod P leží na opačnom oblúku kružnice opísanej tomuto trojuholníku ako bod C. Bod D je pätou kolmice z bodu C na priamku PB. Ukážte, že $|PA| + |PB| = 2 \cdot |PD|$.

Úloha č. 10:
Na stranách BC, CA, AB trojuholníka ABC sú zvolené postupne body D, E, F tak, aby polomery kružníc vpísaných trojuholníkom AEF, BFD, CDE boli rovné r_1. Polomery kružníc vpísaných trojuholníkom DEF a ABC sú postupne r_2 a r. Dokážte, že $r_1 + r_2 = r$.

Úloha č. 11:
Kružnica vpísaná trojuholníku ABC sa dotýka strán BC, CA, AB postupne v bodoch A_1, B_1, C_1. Úsečka KC_1 je priemerom tejto kružnice a bod D je priesečníkom priamok B_1C_1 a A_1K. Dokážte, že $|CD| = |CB_1|$.

Odporúčaná literatúra

Nielen začínajúcim riešiteľom odporúčame preštudovať si nasledujúce knihy o riešení matematických problémov:
Hecht, T. – Sklenáriková, Z.: Metódy riešenia matematických úloh
Larson, L. C.: Metódy riešenia matematických problémov. ALFA, Bratislava, 1990.
Zoznam ďalšej odporúčanej literatúry (aj pre pokročilých riešiteľov), či informácie o jej zapožičaní z našej knižnice nájdete na internete na adrese `kms.sk/kniznica`.

Špeciálne k tejto sérii vám odporúčame prečítať si aj text o počítaní uhlov, ktorý nájdete na adrese
`http://kms.sk/~mazo/matematika/pocitanieUhlov.pdf`.

Fórum o príkladoch

Pre nedočkavcov funguje na stránke KMS diskusné fórum o príkladoch z KMS. Nájdete ho na adrese `kms.sk/forum` a môžete na ňom hneď po termíne danej série začať diskutovať o vašom najobľúbenejšom alebo najmenej obľúbenom príklade, prípadne zverejniť svoje riešenie pre ostatných riešiteľov.

Projekt č. LPP-0103-09 je riešený s finančnou podporou Agentúry na podporu výskumu a vývoja.

Mezinárodní korespondenční seminář

*i*KS

Medzinárodný korešpondenčný seminár

2. ročník
2012 / 2013

web: *www.kms.sk/iks* e-mail: *iks@kms.sk*

Milý riešiteľ!

Vitaj medzi nami! *i*KS je medzinárodný korešpondenčný matematický seminár, na ktorého behu spolupracujú organizátori Korešpondenčného matematického seminára (*www.kms.sk*) a Matematického korespondenčního semináře MFF UK (*mks.mff.cuni.cz*). Nahrádza bývalú najtažšiu kategóriu γ v KMS a je teda určený hlavne pre pokročilých riešiteľov. Určite ale budeme radi za každé poslané riešenie, či len jeho náznak. Jediná vyriešená úloha už môže znamenať slušné umiestnenie!

V priebehu roka bude šesť sérií, ktoré budú striedavo zadávať a opravovať organizátori KMS (nepárne série) a MKS (párne série). **Doručovacia adresa sa teda strieda**. Svoje riešenia môžeš písať slovensky, česky, ale aj anglicky.

Každá séria pozostáva zo štyroch úloh pokrývajúcich štyri základné typy príkladov na matematických olympiádach: **algebra** (A), **kombinatorika** (C), **geometria** (G) a **teória čísel** (N). Za každú úlohu môžeš získať 0 – 7 bodov, vo výnimočných prípadoch (veľmi originálne riešenie, zaujímavé zovšeobecnenie úlohy, ...) môže opravovateľ udeliť až 9 bodov. Príklady sa snažíme zoradiť od najľahšieho po najťažší, hoci je to veľmi individuálne.

Ostatné pravidlá *i*KS sú prakticky zhodné s pravidlami iných korešpondenčných seminárov, pozri napr. *kms.sk/pravidla*. Zdôrazníme preto len najpodstatnejšie veci: každú úlohu spisuj na **osobitný papier A4**, v hlavičke uveď svoje **meno** a **číslo úlohy**. Riešenia posielaj mailom na adresu *iks@kms.sk* alebo poštou, pričom o tom, či si svoje riešenie poslal načas, rozhoduje razítko pošty.

A na koniec, prečo vôbec riešit *i*KS? Predovšetkým ide o veľmi dobrú prípravu na Matematickú olympiádu a medzinárodné matematické súťaže. Najlepší riešitelia získavajú **hodnotné matematické knihy** podľa vlastného výberu, absolútny víťaz získava naviac **tričko s prestížnym nápisom** „Vyhral som *i*KS!“ Navyše pre tento ročník máme ešte jedno prekvapenie, a tým je **exkluzívne *i*KS sústredenie** krátko pred celoštátnym kolom matematickej olympiády. Prajeme Ti príjemný čas strávený nad úlohami *i*KS a vidíme sa v marci :) Viac informácií nájdete na *www.kms.sk/iks*.

Zadanie 1. série

Termín odoslania: 24. septembra 2012

Adresa: *KMS – iKS*
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovakia

Úloha G1. Daný je kruh k. Nájdite všetky možné polohy vrcholu A rovnobežníkov $ABCD$, v ktorých $|AC| < |BD|$ a úsečka BD leží vnútri k.

Úloha N1. Nájdi všetky prvočísla p také, že $p(2^{p-1}-1)$ je k-ta mocnina prirodzeného čísla pre nejaké $k > 1$.

Úloha C1. Dané sú celé čísla $1 \leq a_1, a_2, \ldots, a_m \leq n$ a $1 \leq b_1, b_2, \ldots, b_n \leq m$. Dokážte, že existujú indexy $p \leq q$ a $r \leq s$ také, že $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q = b_r + b_{r+1} + \cdots + b_s$.

Úloha A1. Dokážte, že ak reálne čísla a, b, c spĺňajú $a + b + c = 0$, potom

$$\frac{(2a+1)^2}{2a^2+1} + \frac{(2b+1)^2}{2b^2+1} + \frac{(2c+1)^2}{2c^2+1} \geq 3.$$

Kedy nastáva rovnosť?

Návratka s kontaktnými údajmi

Pošli prosím vyplnené spolu s prvou sériou!

Meno:* Priezvisko:*

Spiatočná adresa:*

Škola:*

E-mail:*

*Nevyhnutný údaj

Zadání 2. série

Termín odeslání: 22. října 2012

Adresa pro odeslání: *Korespondenční seminář iKS*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Česká republika

Úloha N2. Je dáno přirozené číslo d. Dokažte, že je možné najít takové kladné reálné číslo c, že pro všechna přirozená čísla $n > d$ platí nerovnost

$$[n-1, n-2, \ldots, n-d] > cn^d.$$

Hranatými závorkami značíme nejmenší společný násobek.

Úloha G2. Je dán trojúhelník ABC a dále mimo rovinu danou tímto trojúhelníkem bod S takový, že $|SA| = |SB| = |SC|$. Na úsečkách SA, SB, SC nalezneme postupně body X, Y, Z tak, aby rovina XYZ byla rovnoběžná s rovinou ABC. Buď O střed sféry opsané čtyřstěnu $SABZ$. Dokažte, že přímka SO je kolmá na rovinu XYC.

Úloha C2. Pepa s Mirkem hrají deskovou hru. Její součástí je hrací plán a jedna figurka. Na hracím plánu jsou políčka a některé dvojice políček jsou spojeny rourou (roury jsou obousměrné a mohou vést nad sebou a pod sebou)[1]. Na začátku hry položí Mirek figurku na jedno políčko a dále se hráči střídají v tazích. První posune figurku Pepa podél některé roury na další políčko, pak Mirek, … Figurku je zakázáno posunout na políčko, na kterém už někdy stála. Kdo nemůže táhnout, prohrál. Dokažte, že když je počet políček na hracím plánu lichý, tak má Mirek vyhrávající strategii.

Úloha A2. Dokažte, že pokud polynom p s reálnými koeficienty splňuje

$$p(x)^2 - 1 = p(x^2 + 1)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pak to je konstantní polynom.

[1] V grafové terminologii jsou políčka vrcholy a roury hrany obecného grafu.