Mezinárodní korespondenční seminář

Medzinárodný korešpondenčný seminár

web: *www.kms.sk/iks* e-mail: *iks@kms.sk*

Milý riešiteľ!

Vitaj medzi nami! *i*KS je medzinárodný korešpondenčný matematický seminár, na ktorého behu spolupracujú organizátori Korešpondenčného matematického seminára (*www.kms.sk*) a Matematického korespondenčního semináře MFF UK (*mks.mff.cuni.cz*). Nahrádza bývalú najťažšiu kategóriu γ v KMS a je teda určený hlavne pre pokročilých riešiteľov. Určite ale budeme radi za každé poslané riešenie, či len jeho náznak. Jediná vyriešená úloha už môže znamenať slušné umiestnenie!

V priebehu roka bude šesť sérií, ktoré budú striedavo zadávať a opravovať organizátori KMS (nepárne série) a MKS (párne série). **Doručovacia adresa sa teda strieda**. Svoje riešenia môžeš písať slovensky, česky, ale aj anglicky.

Každá séria pozostáva zo štyroch úloh pokrývajúcich štyri základné typy príkladov na matematických olympiádach: **algebra** (A), **kombinatorika** (C), **geometria** (G) a **teória čísel** (N). Za každú úlohu môžeš získať 0 – 7 bodov, vo výnimočných prípadoch (veľmi originálne riešenie, zaujímavé zovšeobecnenie úlohy, ...) môže opravovateľ udeliť až 9 bodov. Príklady sa snažíme zoradiť od najľahšieho po najťažší, hoci je to veľmi individuálne.

Ostatné pravidlá *i*KS sú prakticky zhodné s pravidlami iných korešpondenčných seminárov, pozri napr. *kms.sk/pravidla*. Zdôrazníme preto len najpodstatnejšie veci: každú úlohu spisuj na **osobitný papier A4**, v hlavičke uveď svoje **meno** a **číslo úlohy**. Riešenia posielaj mailom na adresu *iks@kms.sk* alebo poštou, pričom o tom, či si svoje riešenie poslal načas, rozhoduje razítko pošty.

A na koniec, prečo vôbec riešit *i*KS? Predovšetkým ide o veľmi dobrú prípravu na Matematickú olympiádu a medzinárodné matematické súťaže. Najlepší riešitelia získavajú **hodnotné matematické knihy** podľa vlastného výberu, absolútny víťaz získava naviac **tričko s prestížnym nápisom** „Vyhral som *i*KS!“ Navyše pre tento ročník máme ešte jedno prekvapenie, a tým je **exkluzívne *i*KS sústredenie** krátko pred celoštátnym kolom matematickej olympiády. Prajeme Ti príjemný čas strávený nad úlohami *i*KS a vidíme sa v marci :) Viac informácií nájdete na *www.kms.sk/iks*.

Zadanie 1. série

Termín odoslania: 24. septembra 2012

Adresa: *KMS – iKS*
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovakia

Úloha G1. Daný je kruh k. Nájdite všetky možné polohy vrcholu A rovnobežníkov $ABCD$, v ktorých $|AC| < |BD|$ a úsečka BD leží vnútri k.

Úloha N1. Nájdi všetky prvočísla p také, že $p(2^{p-1} - 1)$ je k-ta mocnina prirodzeného čísla pre nejaké $k > 1$.

Úloha C1. Dané sú celé čísla $1 \leq a_1, a_2, \ldots, a_m \leq n$ a $1 \leq b_1, b_2, \ldots, b_n \leq m$. Dokážte, že existujú indexy $p \leq q$ a $r \leq s$ také, že $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q = b_r + b_{r+1} + \cdots + b_s$.

Úloha A1. Dokážte, že ak reálne čísla a, b, c spĺňajú $a + b + c = 0$, potom

$$\frac{(2a+1)^2}{2a^2+1} + \frac{(2b+1)^2}{2b^2+1} + \frac{(2c+1)^2}{2c^2+1} \geq 3.$$

Kedy nastáva rovnosť?

Návratka s kontaktnými údajmi

Pošli prosím vyplnené spolu s prvou sériou!

Meno:* Priezvisko:*

Spiatočná adresa:*

Škola:*

E-mail:*

*Nevyhnutný údaj

Zadání 2. série

Termín odeslání: 22. října 2012

Adresa pro odeslání: *Korespondenční seminář iKS*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Česká republika

Úloha N2. Je dáno přirozené číslo d. Dokažte, že je možné najít takové kladné reálné číslo c, že pro všechna přirozená čísla $n > d$ platí nerovnost

$$[n-1, n-2, \dots, n-d] > cn^d.$$

Hranatými závorkami značíme nejmenší společný násobek.

Úloha G2. Je dán trojúhelník ABC a dále mimo rovinu danou tímto trojúhelníkem bod S takový, že $|SA| = |SB| = |SC|$. Na úsečkách SA, SB, SC nalezneme postupně body X, Y, Z tak, aby rovina XYZ byla rovnoběžná s rovinou ABC. Buď O střed sféry opsané čtyřstěnu $SABZ$. Dokažte, že přímka SO je kolmá na rovinu XYC.

Úloha C2. Pepa s Mirkem hrají deskovou hru. Její součástí je hrací plán a jedna figurka. Na hracím plánu jsou políčka a některé dvojice políček jsou spojeny rourou (roury jsou obousměrné a mohou vést nad sebou a pod sebou)[1]. Na začátku hry položí Mirek figurku na jedno políčko a dále se hráči střídají v tazích. První posune figurku Pepa podél některé roury na další políčko, pak Mirek, … Figurku je zakázáno posunout na políčko, na kterém už někdy stála. Kdo nemůže táhnout, prohrál. Dokažte, že když je počet políček na hracím plánu lichý, tak má Mirek vyhrávající strategii.

Úloha A2. Dokažte, že pokud polynom p s reálnými koeficienty splňuje

$$p(x)^2 - 1 = p(x^2 + 1)$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pak to je konstantní polynom.

[1] V grafové terminologii jsou políčka vrcholy a roury hrany obecného grafu.