60. ročník Matematickej olympiády
2010/2011

Riešenia úloh IMO

---

1. *Pre ľubovoľnú množinu $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ obsahujúcu štyri rôzne kladné celé čísla položme $s_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Označme n_A počet takých dvojíc (i, j) spĺňajúcich $1 \leqq i < j \leqq 4$, pre ktoré je číslo $a_i + a_j$ deliteľom čísla s_A. Určte všetky množiny A obsahujúce štyri rôzne kladné celé čísla, pre ktoré je hodnota n_A najväčšia možná.*

(*Mexiko*)

Riešenie. (Podľa *Natálie Karáskovej*.) Keďže dvojíc (i, j) spĺňajúcich $1 \leqq i < j \leqq 4$ je iba šesť, určite $n_A \leqq 6$.

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Potom platí $0 < a_1 + a_2 < a_3 + a_4$, z čoho po pripočítaní výrazu $a_3 + a_4$ dostaneme

$$a_3 + a_4 < s_A < 2(a_3 + a_4), \qquad \text{čiže} \quad \tfrac{1}{2}s_A < a_3 + a_4 < s_A.$$

Z toho priamo vyplýva, že $a_3 + a_4 \nmid s_A$.

Podobne máme $0 < a_1 + a_3 < a_2 + a_4$ a po pripočítaní $a_2 + a_4$ dostaneme

$$a_2 + a_4 < s_A < 2(a_2 + a_4), \qquad \text{čiže} \quad \tfrac{1}{2}s_A < a_2 + a_4 < s_A,$$

z čoho vyplýva $a_2 + a_4 \nmid s_A$.

Ukázali sme, že minimálne dva zo súčtov $a_i + a_j$ nedelia s_A, teda $n_A \leqq 4$. Predpokladajme, že pre množinu A platí $n_A = 4$ a zaoberajme sa jej vlastnosťami. Keďže $a_2 + a_4$ ani $a_3 + a_4$ nedelia s_A, určite musia byť deliteľmi s_A všetky zvyšné štyri súčty $a_1 + a_2$, $a_1 + a_3$, $a_1 + a_4$, $a_2 + a_3$. Keďže zrejme ani jeden z nich nie je rovný s_A, musí byť každý z nich menší alebo rovný $\frac{1}{2}s_A$.

Keby v niektorej z nerovností $a_1 + a_4 \leqq \frac{1}{2}s_A$, $a_2 + a_3 \leqq \frac{1}{2}s_A$ platila ostrá nerovnosť (t. j. neplatila by rovnosť), ich sčítaním by sme dostali $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 < s_A$, čo je spor. Preto nutne $a_1 + a_4 = a_2 + a_3 = \frac{1}{2}s_A$.

Ďalej vieme, že $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < a_2 + a_4 = \frac{1}{2}s_A$, čiže $a_1 + a_3 \leqq \frac{1}{3}s_A$. Predpokladajme, že $a_1 + a_3 < \frac{1}{3}s_A$. Keďže $a_1 + a_3 \mid s_A$, tak $a_1 + a_3 \leqq \frac{1}{4}s_A$, a tiež $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 \leqq \frac{1}{4}s_A$. Sčítaním dostaneme

$$a_1 + a_3 + a_1 + a_2 \leqq \tfrac{1}{4}s_A + \tfrac{1}{4}s_A = \tfrac{1}{2}s_A = a_2 + a_3,$$

teda $2a_1 < 0$, čo je spor. Takže musí byť $a_1 + a_3 = \frac{1}{3}s_A$.

Z predošlého vieme, že $a_1 + a_2 < a_1 + a_3 = \frac{1}{3}s_A$ a zároveň $a_1 + a_2 \mid s_A$, t. j. $a_1 + a_2 = s_A/x$ pre nejaké celé číslo $x \geqq 4$. Keď prvé dve z troch rovností

$$a_1 + a_2 = \frac{1}{x}s_A, \quad a_1 + a_3 = \frac{1}{3}s_A, \quad a_2 + a_3 = \frac{1}{2}s_A \tag{1}$$

sčítame a tretiu od nich odčítame, dostaneme

$$2a_1 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)s_A = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6}\right)s_A, \qquad \text{t. j.} \quad a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6}\right)s_A. \tag{2}$$

Keďže $a_1 > 0$, musí byť $1/x - 1/6 > 0$, čiže $x < 6$. Vzhľadom na pôvodné ohraničenie $x \geqq 4$ ostávajú len možnosti $x = 4$ a $x = 5$. Pre každú z oboch hodnôt dosadením do (2) vyjadríme a_1 a následne z rovností (1) vyjadríme aj a_2, a_3, a_4:

Ak $x = 4$, tak

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\Big)s_A = \frac{1}{24}s_A,\\
a_2 &= \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\Big)s_A = \frac{5}{24}s_A,\\
a_3 &= \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\Big)s_A = \frac{7}{24}s_A,\\
a_4 &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{24}\Big)s_A = \frac{11}{24}s_A,
\end{aligned}$$

teda $A = \{k, 5k, 7k, 11k\}$ pre nejaké prirodzené číslo k. Ľahko overíme, že pre každú takúto množinu naozaj $n_A = 4$.

Ak $x = 5$, tak

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\Big)s_A = \frac{1}{60}s_A,\\
a_2 &= \Big(\frac{1}{5} - \frac{1}{60}\Big)s_A = \frac{11}{60}s_A,\\
a_3 &= \Big(\frac{1}{3} - \frac{1}{60}\Big)s_A = \frac{19}{60}s_A,\\
a_4 &= \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{60}\Big)s_A = \frac{29}{60}s_A,
\end{aligned}$$

teda $A = \{k, 11k, 19k, 29k\}$ pre nejaké prirodzené číslo k. Aj pre takúto množinu platí $n_A = 4$.

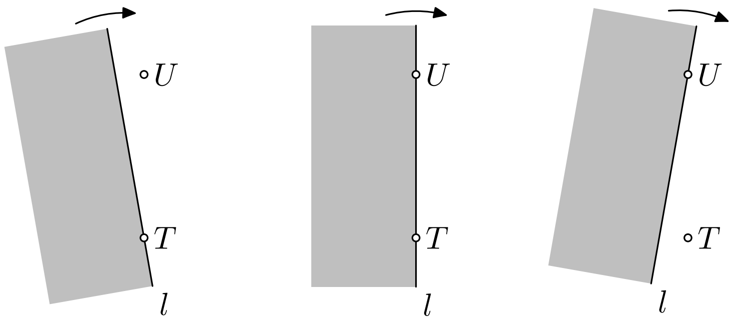
Odpoveď. Najväčšia možná hodnota n_A je 4 a nadobúda sa pre množiny A tvaru $\{k, 5k, 7k, 11k\}$ a $\{k, 11k, 19k, 29k\}$, kde k je ľubovoľné prirodzené číslo.

---

2. *Daná je konečná množina $\mathcal{S}$ aspoň dvoch bodov v rovine, pričom žiadne tri body množiny $\mathcal{S}$ neležia na jednej priamke. Pojmom veterný mlyn rozumieme proces, ktorý začína ľubovoľnou priamkou l prechádzajúcou práve jedným bodom P množiny $\mathcal{S}$. Táto priamka sa otáča v smere hodinových ručičiek okolo pivota P, až kým po prvýkrát neprechádza ďalším bodom množiny $\mathcal{S}$. Tento bod, označme ho Q, sa stáva novým pivotom, t. j. priamka sa ďalej otáča v smere hodinových ručičiek okolo bodu Q, až kým neprechádza ďalším bodom množiny $\mathcal{S}$. Uvedený proces pokračuje donekonečna. Dokážte, že sa dá vybrať bod $P \in \mathcal{S}$ a priamka l prechádzajúca bodom P tak, že pre príslušný veterný mlyn je každý bod množiny $\mathcal{S}$ pivotom nekonečne veľa krát.*

(*Veľká Británia*)

Riešenie. Priamka l delí rovinu na dve časti. Jednu z nich ofarbime sivou a druhú bielou farbou. Všimnime si, že keď sa vo veternom mlyne mení pivot z bodu T na bod U, po zmene sa T nachádza na tej istej strane priamky l, na ktorej sa pred zmenou nachádzal bod U (obr. 1). Takže počet bodov z $\mathcal{S}$ nachádzajúcich sa v sivej časti ostáva stále konštantný (ak neuvažujeme okamihy, v ktorých sa mení pivot); to isté platí samozrejme aj pre bielu časť.



Obr. 1

Uvažujme najskôr prípad, keď $\mathcal{S}$ obsahuje nepárne veľa bodov, t. j. $|\mathcal{S}| = 2n + 1$ pre nejaké prirodzené n. Tvrdíme, že každým bodom $T \in \mathcal{S}$ možno viesť „rozpoľujúcu“ priamku, t. j. priamku, ktorá má na každej strane práve n bodov z $\mathcal{S}$. Existencia rozpoľujúcej priamky vyplýva z jednoduchej úvahy: Veďme cez T ľubovoľnú priamku neprechádzajúcu žiadnym ďalším bodom množiny $\mathcal{S}$. Nech na jednej jej strane je $n + r$ a na druhej $n - r$ bodov z $\mathcal{S}$. Ak $r = 0$, našli sme hľadanú priamku. Ak $r \neq 0$, tak pri postupnom otáčaní priamky stále okolo bodu T sa počet bodov na jej stranách zmení pri každom pretnutí bodu z $\mathcal{S}$ o 1. Pritom po otočení o 180° sa počty zrejme vymenia, takže na prvej strane bude $n - r$ bodov a na druhej $n + r$ bodov. Je jasné, že v istom momente počas otáčania musel byť počet bodov na oboch stranách presne n.

Zvoľme teda bod $P \in \mathcal{S}$ ľubovoľne a za priamku l zoberme k nemu prislúchajúcu rozpoľujúcu priamku. Veterný mlyn s takýmto začiatkom musí navštíviť počas otáčania o prvých 180° každý bod z $\mathcal{S}$ ako pivota. Pre každý bod $T \in \mathcal{S}$ totiž existuje rozpoľujúca priamka t. Rozpoľujúca priamka žiadneho iného bodu z $\mathcal{S}$ nemôže byť rovnobežná s t (pretože každé rovnobežné posunutie priamky t do iného bodu zmení počty bodov na jednotlivých stranách). Takže v momente, keď je priamka veterného mlyna rovnobežná s t, musí to byť práve t (z úvodnej úvahy vieme, že priamka veterného mlyna musí byť stále rozpoľujúca).

Zaoberajme sa ďalej prípadom, keď $\mathcal{S}$ má párne veľa bodov, čiže $|\mathcal{S}| = 2n$. Teraz budeme za „rozpoľujúcu“ považovať takú *orientovanú* priamku vedúcu niektorým bodom $T \in \mathcal{S}$, ktorá má na sivej strane $n - 1$ bodov a na bielej strane n bodov z $\mathcal{S}$. Takú priamku možno viesť každým bodom T, pretože (podobne ako v nepárnom prípade) pri otočení pevne zvolenej priamky o 180° okolo T sa zmení počet bodov z $n - 1 + r$ na $n - r$, pričom zmena je pri prechode každým bodom z $\mathcal{S}$ vždy o 1 (zrejme v závislosti od znamienka r platí buď $n - 1 + r \leqq n - 1 \leqq n - r$ alebo $n - 1 + r \geqq n - 1 \geqq n - r$, takže hodnota $n - 1$ sa v niektorom momente musí nadobudnúť).

Aj v tomto prípade zvolíme $P \in \mathcal{S}$ ľubovoľne a za priamku l zoberieme rozpoľujúcu priamku, pričom v sivej časti bude $n-1$ bodov z $\mathcal{S}$. Tvrdíme, že veterný mlyn s takýmto začiatkom navštívi počas otáčania o prvých 360° každý bod z $\mathcal{S}$ ako pivota. Pre každý bod $T \in \mathcal{S}$ totiž existuje rozpoľujúca priamka t s $n-1$ bodmi v sivej časti a rozpoľujúca priamka žiadneho iného bodu s ňou nie je rovnobežná a zároveň rovnako orientovaná. Takže v momente, keď je priamka veterného mlyna rovnobežná s t a má aj rovnakú orientáciu, musí to byť t.

Ukázali sme, že veterný mlyn sa dá zvoliť tak, aby prechádzal každým bodom ako pivotom (počas otočenia o prvých 180°, resp. 360°). Z uvedeného je tiež zrejmé, že pri otáčaní o ďalšie násobky 180°, resp. 360° bude mlyn prechádzať tými istými pivotmi, takže každý bod bude pivotom nekonečne veľa krát.

3. *Nech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia z množiny reálnych čísel do množiny reálnych čísel spĺňajúca*

$$f(x+y) \leqq yf(x) + f(f(x))$$

pre všetky reálne čísla x a y. Dokážte, že $f(x) = 0$ pre všetky $x \leqq 0$. (*Bielorusko*)

Riešenie. V zadanej funkcionálnej nerovnici sa ako argumenty funkcie objavujú výrazy $x + y$ a x. Aby sme sa zbavili súčtu v argumente, použijeme substitúciu $y = t - x$. Pre všetky reálne čísla x, t potom platí

$$f(t) \leqq tf(x) - xf(x) + f(f(x)). \tag{1}$$

V ďalšom kroku eliminujeme člen $f(f(x))$ tak, že do (1) dosadíme najskôr $t = f(a)$, $x = b$ a potom $t = f(b)$, $x = a$. Dostaneme

$$f(f(a)) - f(f(b)) \leqq f(a)f(b) - bf(b),$$
$$f(f(b)) - f(f(a)) \leqq f(a)f(b) - af(a).$$

Sčítaním dostávame, že pre všetky a, b platí

$$2f(a)f(b) \geqq af(a) + bf(b).$$

Voľbou $b = 2f(a)$ dosiahneme, že ľavá strana poslednej nerovnosti bude rovnaká ako druhý sčítanec na pravej strane. Po ich odčítaní tak ostane nerovnosť $af(a) \leqq 0$, ktorá musí byť splnená pre všetky $a \in \mathbb{R}$. Preto

$$f(a) \geqq 0 \quad \text{pre všetky } a < 0. \tag{2}$$

Ak by pre nejaké x platilo $f(x) > 0$, bola by pre takúto hodnotu pravá strana nerovnosti (1) v premennej t rastúcou lineárnou funkciou, teda by nadobúdala na obore záporných čísel určite aj záporné hodnoty. Potom by však záporné hodnoty na obore záporných čísel musela nadobudnúť aj ľavá strana, čiže funkcia f, čo je v spore s (2). Preto

$$f(x) \leqq 0 \quad \text{pre všetky } x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Spojením (2) a (3) ihneď máme $f(x) = 0$ pre všetky $x < 0$. Ostáva určiť hodnotu $f(0)$. Ak v (1) položíme $t = x < 0$, dostaneme $0 \leqq 0 - 0 + f(0)$, čiže $f(0) \geqq 0$. Vzhľadom na (3) už potom nutne $f(0) = 0$.

4. *Nech $n > 0$ je celé číslo. K dispozícii máme rovnoramenné váhy a n závaží s hmotnosťami 2^0, 2^1, …, 2^{n-1}. Jednotlivé závažia máme v nejakom poradí ukladať na misky váh tak, aby obsah pravej misky nebol v žiadnom okamihu ťažší ako obsah ľavej misky. V každom kroku vyberieme jedno zo závaží, ktoré ešte nie je na váhach, a položíme ho buď na ľavú alebo na pravú misku váh. Tak postupujeme, kým neminieme všetky závažia. Určte, koľkými spôsobmi to celé môžeme urobiť.* (*Irán*)

Riešenie. (Podľa *Natálie Karáskovej*.) Závažia, ktoré máme k dispozícii, majú nasledujúcu vlastnosť: Najťažšie závažie je ťažšie ako všetky ostatné dokopy, ba dokonca všeobecnejšie – *každé závažie je ťažšie ako súčet hmotností všetkých od neho ľahších závaží.*

Z toho dôvodu sa nikdy nemôže stať, že by súčet nejakých ľahších závaží preváži ťažšie závažie. Inými slovami, nutná a postačujúca podmienka, ktorú musíme pri ukladaní závaží splniť, je, že v každom okamihu najťažšie závažie spomedzi všetkých dovtedy uložených musí byť na ľavej strane.

V skutočnosti teda nezáleží na tom, koľko závažia vážia. Ak označíme $P(k)$ počet spôsobov, koľkými vieme uložiť závažia s hmotnosťami $2^0, 2^1, \ldots, 2^{k-1}$, tak aj hocakých iných k závaží spĺňajúcich vlastnosť uvedenú kurzívou v prvom odseku vieme uložiť $P(k)$ spôsobmi.

Počet $P(n)$ teda môžeme určiť „induktívne". Pre $n = 1$ je zrejme jediná možnosť (závažie musíme uložiť naľavo), t. j. $P(1) = 1$.

Predpokladajme, že poznáme hodnotu $P(k)$. Skúmajme, koľkými spôsobmi vieme uložiť $k + 1$ závaží. Najprv sa rozhodneme, ktorých k závaží spomedzi všetkých $k + 1$ umiestnime najskôr. Bez ohľadu na to, ktoré vezmeme, vieme ich vždy uložiť $P(k)$ spôsobmi (keďže majú avizovanú vlastnosť). Každý z týchto spôsobov môžeme doplniť posledným závažím. Ak ako posledné ukladáme najťažšie závažie (s hmotnosťou 2^k), musíme ho dať nutne na ľavú misku. Ak ukladáme jedno z k ľahších závaží, najťažšie je už určite vľavo, a teda bez ohľadu na to, kam dáme posledné závažie, ostane ľavá strana ťažšia. V tomto prípade máme preto dve rôzne možnosti. Dostávame

$$P(k+1) = P(k) + k \cdot P(k) \cdot 2 = P(k) \cdot (2k+1).$$

Platí teda

$$\begin{aligned} P(2) &= P(1) \cdot 3 = 1 \cdot 3, \\ P(3) &= P(2) \cdot 5 = 1 \cdot 3 \cdot 5, \\ &\vdots \\ P(n) &= P(n-1) \cdot (2n-1) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1). \end{aligned}$$

Odpoveď. Hľadaný počet spôsobov je rovný súčinu prvých n nepárnych čísel (skrátene sa tento výraz niekedy označuje $(2n-1)!!$).

---

5. *Nech f je funkcia z množiny celých čísel do množiny kladných celých čísel. Predpokladajme, že pre ľubovoľné dve celé čísla m a n je rozdiel $f(m) - f(n)$ deliteľný číslom $f(m-n)$. Dokážte, že pre každé dve celé čísla m a n také, že $f(m) \leqq f(n)$, je číslo $f(n)$ deliteľné číslom $f(m)$.* (Irán)

Riešenie. (Podľa *Ondreja Kováča.*) Podľa zadania pre ľubovoľné celé čísla a, b platí

$$f(a-b) \mid f(a) - f(b). \tag{1}$$

Voľbou $a = c$, $b = 0$ dostávame $f(c) \mid f(c) - f(0)$, odkiaľ $f(c) \mid f(0)$ pre každé celé c. Z voľby $a = 0$, $b = -c$ vyplýva $f(c) \mid f(0) - f(-c)$, a keďže $f(c) \mid f(0)$, nutne $f(c) \mid f(-c)$. To však platí pre ľubovoľné celé číslo c, takže zároveň aj $f(-c) \mid f(c)$, z čoho vzhľadom na kladnosť funkcie f vyplýva $f(c) = f(-c)$ pre všetky celé c.

Predpokladajme, že $f(m) \leqq f(n)$. Ak $f(m) = f(n)$, tak triviálne platí $f(m) \mid f(n)$ a nemáme čo dokazovať. Ďalej sa preto obmedzíme na prípad $f(m) < f(n)$.

Dosadením $a = n$, $b = m$ do (1) dostaneme $f(n-m) \mid f(n) - f(m)$, teda existuje kladné číslo $k$také, že

$$f(n) - f(m) = f(n-m) \cdot k = f(m-n) \cdot k \tag{2}$$

(rovnosť $f(n-m) = f(m-n)$ vyplýva z úvodného odseku; kladnosť k vyplýva z predpokladu $f(m) < f(n)$ a z kladnosti funkcie f).

Dosadením $a = m$, $b = m - n$ do (1) dostaneme $f(n) \mid f(m) - f(m-n)$, teda existuje celé číslo l také, že

$$f(n) \cdot l = f(m) - f(m-n).$$

Ostatnú rovnosť prenásobíme číslom k a využijeme (2):

$$f(n) \cdot lk = \big(f(m) - f(m-n)\big)k = f(m) \cdot k - \big(f(n) - f(m)\big) = f(m)(k+1) - f(n).$$

Z toho po jednoduchej úprave máme

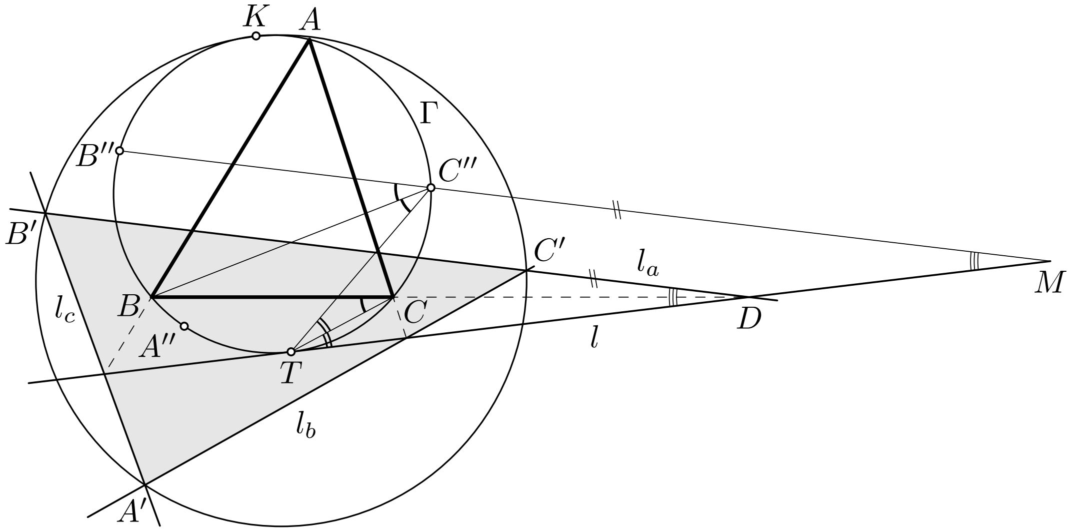
$$(kl+1) \cdot f(n) = (k+1) \cdot f(m).$$

Keďže výraz na pravej strane je kladný, musí byť kladný aj činiteľ $kl + 1$, čiže $l \geqq 0$. Z nerovnosti $f(n) > f(m)$ a z poslednej rovnosti potom vyplýva $kl + 1 < k + 1$, čiže $l < 1$. Jedinou prípustnou hodnotou je teda $l = 0$, odkiaľ $f(n) = (k+1)f(m)$, z čoho už priamo vyplýva $f(m) \mid f(n)$.

---

6. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC a kružnica Γ jemu opísaná. Nech l je dotyčnica kružnice Γ a nech l_a, l_b, l_c sú obrazy priamky l v osových súmernostiach podľa priamok BC, CA, AB. Dokážte, že kružnica opísaná trojuholníku určenému priamkami l_a, l_b, l_c sa dotýka kružnice Γ.* (Japonsko)

Riešenie. Bod dotyku priamky l a kružnice Γ označme T a vrcholy trojuholníka určeného priamkami l_a, l_b, l_c označme A', B', C' tak ako na obr. 2. Nech A'' je taký bod



Obr. 2

na kružnici Γ, že A je stredom oblúka TA'' (t. j. $|TA| = |AA''|$). Podobne sú definované body B'', C''. V celom riešení budeme kvôli stručnosti predpokladať, že situácia vyzerá tak, ako na obr. 2. V riešení pre každú inú možnú polohu by sme postupovali podobne – s využívaním analogických úvah.[1]

Ak označíme M priesečník priamok l a $B''C''$ a D priesečník priamok l a l_a, s využitím úsekových uhlov a toho, že B, C sú stredy oblúkov TB'', TC'', máme

$$|\measuredangle TMC''| = 180^\circ - |\measuredangle TC''M| - |\measuredangle MTC''| = |\measuredangle TC''B''| - 2|\measuredangle MTC| = \\ = 2(|\measuredangle TC''B| - |\measuredangle MTC|) = 2(|\measuredangle TCB| - |\measuredangle MTC|) = 2|\measuredangle TDC| = |\measuredangle TDC'|.$$

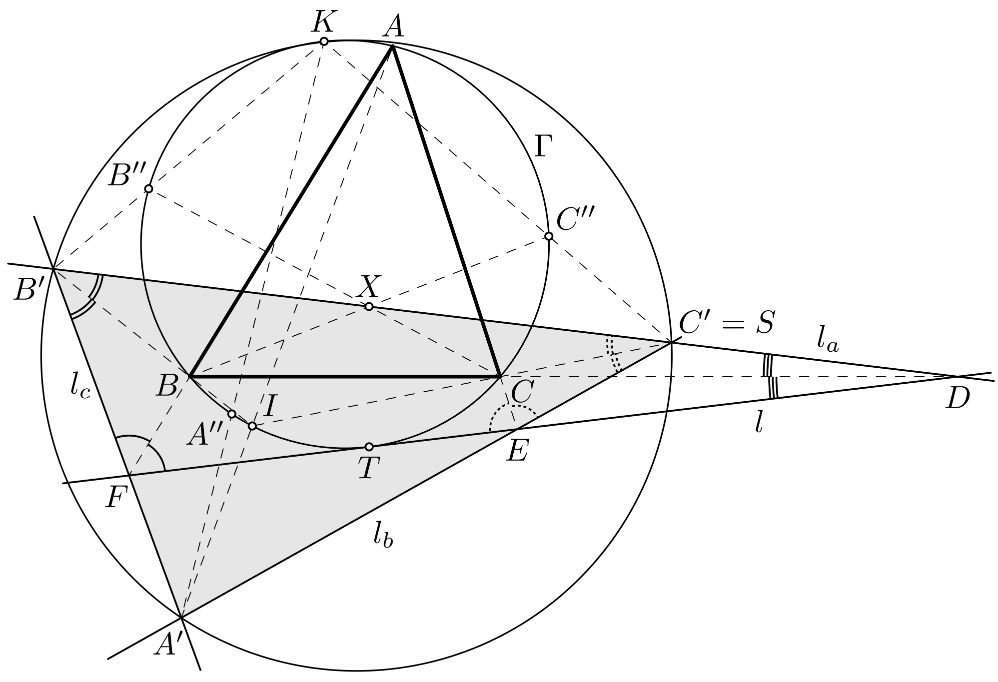
Takže priamky l_a a $B''C''$ sú rovnobežné. Podobnými úvahami možno odvodiť $l_b \parallel A''C''$ a $l_c \parallel A''B''$. Z toho vyplýva, že trojuholníky $A'B'C'$, $A''B''C''$ sú buď rovnoľahlé[2], alebo je jeden posunutím druhého. V ďalšom dokážeme, že sú rovnoľahlé, a že stred ich rovnoľahlosti K leží na kružnici Γ. Z toho už bude vyplývať, že ich opísané kružnice sú tiež rovnoľahlé so stredom rovnoľahlosti K, a preto sa v ňom dotýkajú.

Dokážeme dve pomocné tvrdenia.

Tvrdenie 1. Priesečník X priamok $B''C$, BC'' leží na priamke l_a.

Dôkaz. Bod B je stredom oblúka TB'', teda $|\measuredangle BCT| = |\measuredangle BCB''|$ a priamka $B''C$ je obrazom priamky TC v osovej súmernosti podľa BC. Podobne je priamka BC'' obrazom priamky BT. Takže X je obrazom bodu T v tejto súmernosti, t. j. leží na l_a. □

Tvrdenie 2. Priesečník I priamok BB', CC' leží na kružnici Γ.



Obr. 3

Dôkaz. Označme $E = AC \cap l$, $F = AB \cap l$ (obr. 3) a veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC označme štandardne α, β, γ. Zo zadaných osových súmerností vyplýva,

[1] Osobitne treba uvažovať najmä polohu, keď je l rovnobežná s niektorou stranou trojuholníka ABC.

[2] Hovoríme, že dva trojuholníky sú rovnoľahlé, ak existuje rovnoľahlosť, ktorá zobrazí jeden na druhý.

že bod B je priesečníkom osí uhlov pri vrcholoch D, F v trojuholníku FDB'. Preto je B stredom kružnice vpísanej tomuto trojuholníku a leží aj na osi uhla pri vrchole B'. Máme tak

$$|\measuredangle BB'C'| = \tfrac{1}{2}(180^\circ - |\measuredangle B'FD| - |\measuredangle FDB'|) = 90^\circ - |\measuredangle BFD| - |\measuredangle BDF| = 90^\circ - \beta.$$

Podobne je bod C stredom kružnice pripísanej k strane EC' trojuholníka EDC', odkiaľ

$$|\measuredangle CC'B'| = \tfrac{1}{2}(|\measuredangle EDC'| + |\measuredangle DEC'|) = |\measuredangle EDC| + |\measuredangle CED| - 90^\circ = 90^\circ - \gamma.$$

Dopočítaním tretieho uhla v trojuholníku $B'C'I$ dostávame

$$|\measuredangle B'IC'| = 180^\circ - (90^\circ - \beta + 90^\circ - \gamma) = \beta + \gamma = 180^\circ - \alpha,$$

teda bod I leží na kružnici Γ. $\square$

Označme K druhý priesečník priamky $B'B''$ s kružnicou Γ. Dôkaz dokončíme použitím Pascalovej vety pre šesticu bodov K, B'', C, I, B, C'' na kružnici Γ. Podľa nej ležia body $B' = KB'' \cap IB$, $X = B''C \cap BC''$ a $S = CI \cap C''K$ na jednej priamke. Preto $S = C'$, čiže body K, C'', C' ležia na jednej priamke. Bod K je potom priesečníkom priamok $B'B''$, $C'C''$, z čoho vyplýva, že K je stredom rovnoľahlosti zobrazujúcej $A'B'C'$ na $A''B''C''$ a leží na kružnici Γ.