62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh školského kola kategórie A*

1. *V obdĺžniku $ABCD$ so stranami $|AB| = 9$, $|BC| = 8$ ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že k_1 sa dotýka strán AD a CD, k_2 sa dotýka strán AB a BC.*

a) Dokážte, že $r_1 + r_2 = 5$.

b) Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu obsahu trojuholníka AS_1S_2.

(*Pavel Novotný*)

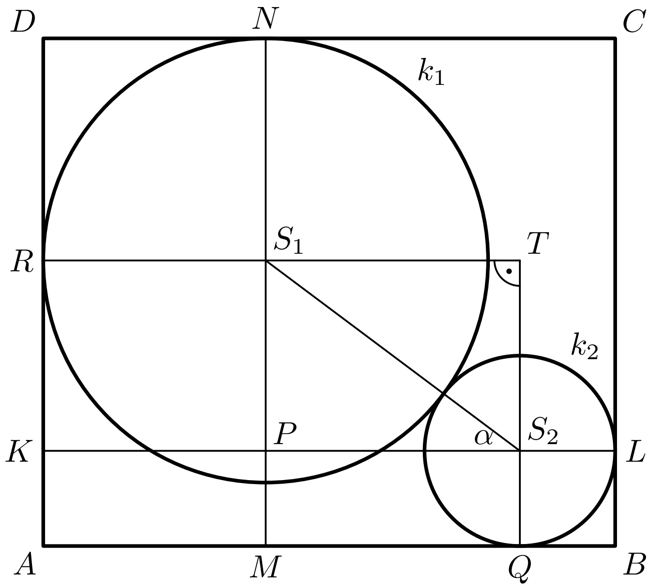
Riešenie. a) Bodom S_1 veďme rovnobežku so stranou AD a jej priesečníky so stranami AB a CD označme M a N. Podobne vedieme bodom S_2 rovnobežku s AB a jej priesečníky so stranami AD a BC označíme K a L; priesečník priamok KL a MN nech je P (obr. 1). Podľa Pytagorovej vety pre trojuholník S_1PS_2 platí

$$(r_1 + r_2)^2 = (8 - r_1 - r_2)^2 + (9 - r_1 - r_2)^2 \tag{1}$$

a odtiaľ

$$(r_1 + r_2)^2 - 34(r_1 + r_2) + 145 = 0,$$
$$(r_1 + r_2 - 5)(r_1 + r_2 - 29) = 0.$$

Keďže $2r_1 \leqq 8$, $2r_2 \leqq 8$ (priemer kružníc nemôže byť väčší ako dĺžka strany AD), musí platiť $r_1 + r_2 = 5$.



Obr. 1

b) Označíme Q pätu kolmice z bodu S_2 na stranu AB, R pätu kolmice z bodu S_1 na stranu AD a T priesečník priamok QS_2 a RS_1. Obsah S trojuholníka AS_2S_1 vypočítame tak, že od obsahu pravouholníka $AQTR$ odčítame súčet obsahov pravouhlých trojuholníkov AQS_2, AS_1R a S_1S_2T:

$$S = (9 - r_2)(8 - r_1) - \frac{1}{2}r_2(9 - r_2) - \frac{1}{2}r_1(8 - r_1) - \frac{1}{2}(9 - r_1 - r_2)(8 - r_1 - r_2) =$$
$$= 72 - 9r_1 - 8r_2 + r_1r_2 - \frac{9}{2}r_2 + \frac{1}{2}r_2^2 - 4r_1 + \frac{1}{2}r_1^2 - 36 + \frac{17}{2}(r_1 + r_2) - \frac{1}{2}(r_1 + r_2)^2$$

a po využití rovnosti $r_1 + r_2 = 5$ dostaneme

$$S = \frac{157}{2} - 13r_1 - \frac{25}{2}r_2 = 16 - \frac{1}{2}r_1.$$

Z rovnosti $r_1 + r_2 = 5$ a nerovností $2r_1 \leqq 8$, $2r_2 \leqq 8$ vyplýva $r_1 \in \langle 1, 4\rangle$, a teda

$$S \in \left\langle 14, \frac{31}{2} \right\rangle;$$

obsah má najmenšiu hodnotu 14, keď $r_1 = 4$ a $r_2 = 1$, a najväčšiu hodnotu $\frac{31}{2}$, keď $r_1 = 1$ a $r_2 = 4$.

Iné riešenie. a) Označme α uhol medzi priamkami KL a S_1S_2 (obr. 1). Z rovnosti $|AB| = |KP| + |PS_2| + |S_2L|$ máme $r_1 + (r_1 + r_2)\cos\alpha + r_2 = 9$ čiže

$$(1 + \cos\alpha)(r_1 + r_2) = 9. \tag{2}$$

Podobne z rovnosti $|AD| = |MP| + |PS_1| + |S_1N|$ vyplýva

$$(1 + \sin\alpha)(r_1 + r_2) = 8. \tag{3}$$

Z posledných dvoch rovníc máme po úprave a umocnení

$$\begin{aligned} 8(1 + \cos\alpha) &= 9(1 + \sin\alpha), \\ 8\cos\alpha &= 1 + 9\sin\alpha, \\ 64(1 - \sin^2\alpha) &= 1 + 18\sin\alpha + 81\sin^2\alpha, \\ 145\sin^2\alpha + 18\sin\alpha - 63 &= 0 \end{aligned}$$

a odtiaľ[1]

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}$$

a

$$r_1 + r_2 = \frac{8}{1 + \sin\alpha} = 5.$$

b) Obsah S trojuholníka AS_2S_1 môžeme vypočítať pomocou vektorového súčinu vektorov $S_2 - A$ a $S_1 - A$. Zvolíme sústavu súradníc, v ktorej $A = [0,0,0], B = [9,0,0], D = [0,8,0]$. Potom $S_2 = [9 - r_2, r_2, 0], S_1 = [r_1, 8 - r_1, 0]$ a skúmaný obsah je

$$S = \frac{1}{2}|(S_2 - A) \times (S_1 - A)| = \frac{1}{2}[(9 - r_2)(8 - r_1) - r_1r_2] = \frac{1}{2}(72 - 9r_1 - 8r_2) = 16 - \frac{1}{2}r_1.$$

Dostali sme rovnaký výraz ako v prvom riešení, a tak tým istým postupom zistíme, že skúmaný obsah má najmenšiu hodnotu 14 a najväčšiu hodnotu $\frac{31}{2}$.

Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov. Jeden bod prideľte za rovnicu (1) alebo za sústavu (2), (3), ďalší bod za určenie súčtu $r_1 + r_2$, teda za časť a) najviac dva body. Dva body dajte za výpočet obsahu trojuholníka AS_2S_1 v tvare $S = 16 - \frac{1}{2}r_1$ alebo $S = \frac{27}{2} + \frac{1}{2}r_2$ a zvyšné dva body za určenie najmenšej a najväčšej hodnoty obsahu využitím nerovností $1 \leqq r_1 \leqq 4$ alebo $1 \leqq r_2 \leqq 4$.

[1] Druhý koreň $t = -\frac{21}{29}$ kvadratickej rovnice $145t^2 + 18t - 63$ nemusíme uvažovať, keďže v našej situácii $\sin\alpha > 0$.

2. *Na každej z $n+1$ stien n-bokého ihlana je napísané číslo 0. V každom kroku zvolíme niektorý vrchol a čísla na všetkých stenách obsahujúcich tento vrchol zväčšíme o 1 alebo ich všetky zmenšíme o 1. Dokážte, že nemôže nastať situácia, v ktorej by na všetkých stenách ihlana bolo napísané číslo 1.* (*Peter Novotný*)

Riešenie. Označme b súčet čísel na bočných stenách ihlana, a číslo na jeho podstave. Ak zvolíme niektorý z vrcholov podstavy, číslo b sa zväčší o 2 alebo zmenší o 2 a číslo a sa zväčší o 1 alebo zmenší o 1. Hodnota výrazu $V = b - 2a$ sa teda nezmení. Pri voľbe hlavného vrcholu ostane číslo a nezmenené a číslo b sa zväčší alebo zmenší o n, takže hodnota výrazu V sa zväčší alebo zmenší o n. Keďže na začiatku je $V = 0$, po ľubovoľnom počte krokov bude V deliteľné číslom n. Keby boli na všetkých stenách jednotky, mal by výraz V hodnotu $n - 2$. Toto číslo ale nie je deliteľné číslom n, lebo $n \geqq 3$.

Iné riešenie. Nech pri voľbe hlavného vrcholu sa u-krát čísla zväčšujú a v-krát zmenšujú. Podobne nech sa pri voľbe vrcholu A_i podstavy čísla w_i-krát zväčšujú a z_i-krát zmenšujú. Označme $y = u - v$, $x_i = w_i - z_i$. Keby boli na všetkých stenách jednotky, platili by rovnosti

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + y &= 1, \\ x_2 + x_3 + y &= 1, \\ &\vdots \\ x_{n-1} + x_n + y &= 1, \\ x_n + x_1 + y &= 1, \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Sčítaním prvých n rovností dostaneme $2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + ny = n$ a podľa (1) máme

$$2 + ny = n.$$

Odtiaľ vyplýva $n \mid 2$, ale to pre žiadne $n \geqq 3$ neplatí.

Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov. Pri prvom postupe za úvahy o zmenách hodnôt a a b dajte jeden bod, ďalšie tri body za zistenie, že hodnota výrazu V (prípadne iného vhodného výrazu, napr. $V = b + (n-2)a$) musí byť stále deliteľná číslom n. Zvyšné dva body za dôkaz, že nemôžu byť na všetkých stenách jednotky, pretože by V nebolo deliteľné číslom n. Pri druhom postupe dajte tri body za zostavenie sústavy $n+1$ rovníc ako v tu uvedenom riešení, ďalšie dva body za rovnosť $2 + ny = n$ a jeden bod za záver, že táto rovnosť pre žiadne $n \geqq 3$ neplatí.

3. *Určte všetky trojice reálnych čísel a, b, c, ktoré spĺňajú podmienky*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 26, \quad a + b = 5 \quad \text{a} \quad b + c \geqq 7.$$

(*Pavel Novotný*)

Riešenie. Ukážeme, že úlohe vyhovuje jediná trojica čísel: $a = 1$, $b = 4$ a $c = 3$.

Označme $s = b + c \geqq 7$. Dosadením $a = 5 - b$ a $c = s - b$ do prvej podmienky dostaneme

$$a^2 + b^2 + c^2 = (5-b)^2 + b^2 + (s-b)^2 = 26,$$

a teda
$$3b^2 - 2(s+5)b + s^2 - 1 = 0. \tag{1}$$
Táto kvadratická rovnica s parametrom s má v množine reálnych čísel riešenie práve vtedy, keď pre jej diskriminant platí $4(s+5)^2 - 12(s^2-1) \geqq 0$. Úpravou tejto nerovnice dostaneme $s^2 - 5s - 14 \leqq 0$ čiže $(s+2)(s-7) \leqq 0$. Odtiaľ $s \in \langle -2, 7\rangle$ a vzhľadom na podmienku $s \geqq 7$ musí byť $s = 7$. Po dosadení do (1) máme
$$3b^2 - 24b + 48 = 0;$$
táto rovnica má jediné riešenie $b = 4$. Ľahko potom dopočítame $a = 1$ a $c = 3$.

Iné riešenie. Ak uhádneme vyhovujúcu trojicu $a = 1$, $b = 4$ a $c = 3$, tak jej jedinečnosť ľahko zdôvodníme, keď ukážeme, že hodnota nezáporného súčtu
$$S = (a-1)^2 + (b-4)^2 + (c-3)^2$$
musí byť pre každú vyhovujúcu trojicu rovná nule. Pri podmienkach zo zadania úlohy totiž platí
$$\begin{aligned} S &= (a^2+b^2+c^2) - 2(a+b) - 6(b+c) + (1^2+4^2+3^2) = \\ &= 26 - 2\cdot 5 - 6(b+c) + 26 = 42 - 6(b+c) \leqq 42 - 6\cdot 7 = 0, \end{aligned}$$
takže naozaj $S = 0$, a teda $a = 1$, $b = 4$ a $c = 3$.

Za úplné riešenie úlohy dajte 6 bodov. Jeden bod dajte za vyjadrenie $a = 5 - b$, $c = s - b$, kde $s \geqq 7$, druhý bod za rovnicu $3b^2 - 2(s+5)b + s^2 - 1 = 0$, dva body za nerovnicu $4(s+5)^2 - 12(s^2-1) \geqq 0$ a jeden bod za jej vyriešenie. Šiesty bod potom za dopočítanie b, a, c. Len za uhádnutie vyhovujúcej trojice dajte 1 bod.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KK MO alebo nimi poverenej osobe tak, aby zásielka bola doručená pred Vianocami. Odporúča sa odoslať ich najneskôr 17. decembra 1. triedou.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Pavel Novotný, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012