

2006/2007

56. ročník Matematickej olympiády

Zadania úloh IMO

(Súťaž sa konala 24. – 30. 7. 2007.)

1. Dané sú reálne čísla a_1, a_2, \dots, a_n . Pre každé i ($1 \leq i \leq n$) definujeme

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}.$$

Nech

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ platí nerovnosť

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (*)$$

(b) Ukážte, že existujú také reálne čísla $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, že v (*) nastane rovnosť.

(Nový Zéland)

2. Uvažujme päť takých bodov A, B, C, D, E , že $ABCD$ je rovnobežník a štvoruholník $BCED$ je tetivový. Priamka l prechádza bodom A , pričom pretína úsečku DC v jej vnútornom bode F a priamku BC v bode G . Predpokladajme, že $|EF| = |EG| = |EC|$. Dokážte, že priamka l je osou uhla DAB .
(Luxembursko)

3. Niektorí účastníci matematickej súťaže sú priatelia. Priateľstvo je vzájomné. Skupinu súťažiacich nazveme *klika*, ak každí dvaja z nich sú priatelia. (Špeciálne, ľubovoľná skupina pozostávajúca z menej ako dvoch súťažiacich je klika.) Počet členov kliky nazveme jej *rozmerom*.

Vieme, že najväčší rozmer kliky pozostávajúcej z účastníkov súťaže je párne číslo. Dokážte, že všetkých súťažiacich možno rozsadit' do dvoch miestností tak, aby najväčší rozmer kliky v jednej miestnosti sa rovnal najväčšiemu rozmeru kliky v druhej miestnosti.
(Rusko)

4. Os uhla BCA trojuholníka ABC pretína jeho opísanú kružnicu v bode R rôznom od bodu C , os strany BC v bode P a os strany AC v bode Q . Stred strany BC označme K a stred strany AC označme L . Dokážte, že obsahy trojuholníkov RPK a RQL sa rovnajú.
(Česká rep.)

5. Kladné celé čísla a, b sú také, že číslo $(4a^2 - 1)^2$ je deliteľné $4ab - 1$. Dokážte, že $a = b$.
(Veľká Británia)

6. Nech n je kladné celé číslo. Uvažujme množinu

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\}$$

pozostávajúcu z $(n + 1)^3 - 1$ bodov trojrozmerného priestoru. Určte najmenší možný počet rovín, ktorých zjednotenie obsahuje všetky body z S , ale neobsahuje bod $(0, 0, 0)$.
(Holandsko)