

2012/2013
62. ročník MO

Zadania úloh školského kola kategórie A

(Súťaž sa konala v utorok 11. decembra 2012.)

1. V obdĺžniku $ABCD$ so stranami $|AB| = 9$, $|BC| = 8$ ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že k_1 sa dotýka strán AD a CD , k_2 sa dotýka strán AB a BC .

a) Dokážte, že $r_1 + r_2 = 5$.

b) Určte najmenšiu a najväčšiu možnú hodnotu obsahu trojuholníka AS_1S_2 .

(Pavel Novotný)

2. Na každej z $n + 1$ stien n -bokého ihlana je napísané číslo 0. V každom kroku zvolíme niektorý vrchol a čísla na všetkých stenách obsahujúcich tento vrchol zväčšíme o 1 alebo ich všetky zmenšíme o 1. Dokážte, že nemôže nastať situácia, v ktorej by na všetkých stenách ihlana bolo napísané číslo 1.

(Peter Novotný)

3. Určte všetky trojice reálnych čísel a , b , c , ktoré spĺňajú podmienky

$$a^2 + b^2 + c^2 = 26, \quad a + b = 5 \quad \text{a} \quad b + c \geq 7.$$

(Pavel Novotný)