62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013

Riešenia úloh domáceho kola kategórie A

1. *Nájdite všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré existuje prirodzené číslo a také, že*

$$\frac{pq}{p+q} = \frac{a^2+1}{a+1}.$$

(*Ján Mazák, Róbert Tóth*)

Riešenie. Budeme sa najskôr zaoberať prípadom, keď hľadané prvočísla p a q sú rôzne. Vtedy sú čísla pq a $p+q$ nesúdeliteľné: súčin pq je totiž deliteľný len dvoma prvočíslami p a q, ale súčet $p+q$ žiadnym z týchto prvočísel deliteľný nie je.

Zistíme, ktoré prirodzené číslo r môže byť spoločným deliteľom čísel $a+1$ a a^2+1. Ak $r \mid a+1$ a súčasne $r \mid a^2+1$, potom $r \mid (a+1)(a-1)$ a tiež $r \mid (a^2+1)-(a^2-1) = 2$, takže r musí byť niektoré z čísel 1 a 2. Buď je teda zlomok $\dfrac{a^2+1}{a+1}$ v základnom tvare, alebo základný tvar vznikne vykrátením dvoma. Preskúmame obidve možnosti.

V prvom prípade, ktorý zrejme nastáva, keď je číslo a párne, musí platiť

$$pq = a^2+1 \quad \text{a} \quad p+q = a+1.$$

Čísla p, q sú teda korene kvadratickej rovnice $x^2-(a+1)x+a^2+1=0$; jej diskriminant

$$(a+1)^2 - 4(a^2+1) = -3a^2+2a-3 = -2a^2-(a-1)^2-2$$

je ale záporný, preto rovnica nemá v množine reálnych čísel riešenie.

Ak je a nepárne, je najväčším spoločným deliteľom čísel a^2+1 a $a+1$ číslo 2. Preto

$$2pq = a^2+1 \quad \text{a} \quad 2(p+q) = a+1.$$

Čísla p, q sú teda korene kvadratickej rovnice $2x^2-(a+1)x+a^2+1=0$; jej diskriminant je ale taktiež záporný. Žiadna dvojica rôznych prvočísel p, q teda úlohe nevyhovuje.

Ostala možnosť $p=q$. Potom

$$\frac{p\cdot q}{p+q} = \frac{p\cdot p}{p+p} = \frac{p}{2},$$

preto

$$p = \frac{2(a^2+1)}{a+1} = 2a-2+\frac{4}{a+1};$$

to je celé číslo práve vtedy, keď $a+1 \mid 4$ čiže $a \in \{1,3\}$, takže $p=2$ alebo $p=5$.

Úlohe teda vyhovujú dvojice $p=q=2$ a $p=q=5$.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Nech p a q sú prvočísla. Zistite, aký je najväčší spoločný deliteľ čísel $p+q$ a p^2+q^2. [$2p$, ak $p=q$; 2, ak sú p a q rôzne nepárne prvočísla; 1, ak je jedno z čísel p, q párne a jedno nepárne]

N2. Dokážte, že zlomok $\dfrac{21n+4}{14n+3}$, v ktorom n je prirodzené číslo, sa nedá krátiť. [1. MMO, 1959]

N3. Určte všetky celé čísla väčšie ako 1, ktorými možno krátiť niektorý zo zlomkov tvaru $\dfrac{3p-q}{5p+2q}$, kde p a q sú nesúdeliteľné celé čísla. [58–A–S–3]

N4. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel x, y také, že $\dfrac{xy^2}{x+y}$ je prvočíslo. [58–A–I–3]

N5. Určte všetky dvojice prvočísel p, q, pre ktoré platí $p+q^2=q+p^3$. [55–B–II–1]

D1. Nájdite všetky trojice navzájom rôznych prvočísel p, q, r spĺňajúce nasledujúce podmienky:

$$p \mid q+r, \quad q \mid r+2p, \quad r \mid p+3q.$$

[55–A–III–5]

---

2. *Dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ sa zvonka dotýkajú a ležia vo štvorci $ABCD$ so stranou a tak, že k_1 se dotýka strán AD a CD a k_2 sa dotýka strán BC a CD. Dokážte, že aspoň jeden z trojuholníkov AS_1S_2, BS_1S_2 má obsah najviac $\frac{3}{16}a^2$.* (Tomáš Jurík)

Riešenie. Úsečky AS_2 a BS_1 ležia na uhlopriečkach štvorca, sú teda navzájom kolmé a pretínajú sa v strede P štvorca. Platí

$$|DS_1| = r_1 \cdot \sqrt{2}, \quad |BS_1| = (a-r_1)\sqrt{2}, \quad |PS_1| = \left(\frac{a}{2}-r_1\right)\sqrt{2},$$

$$|CS_2| = r_2 \cdot \sqrt{2}, \quad |AS_2| = (a-r_2)\sqrt{2}, \quad |PS_2| = \left(\frac{a}{2}-r_2\right)\sqrt{2}.$$

Preto má trojuholník AS_1S_2 obsah

$$S_{AS_1S_2} = \frac{1}{2}|AS_2| \cdot |PS_1| = (a-r_2)\left(\frac{a}{2}-r_1\right)$$

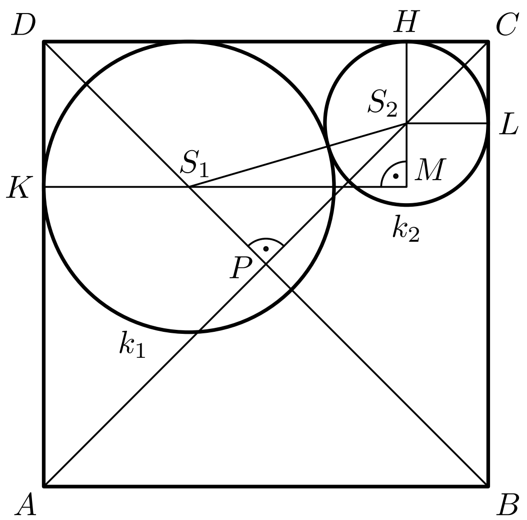
a trojuholník BS_1S_2 obsah

$$S_{BS_1S_2} = \frac{1}{2}|BS_1| \cdot |PS_2| = (a-r_1)\left(\frac{a}{2}-r_2\right).$$

Súčet oboch obsahov je

$$S = (a-r_2)\left(\frac{a}{2}-r_1\right) + (a-r_1)\left(\frac{a}{2}-r_2\right) = a^2 - \frac{3}{2}a(r_1+r_2) + 2r_1r_2.$$

Označme K bod dotyku kružnice k_1 so stranou AD, H a L body dotyku kružnice k_2 so stranami CD a BC a M priesečník priamok KS_1 a HS_2 (obr. 1).



Obr. 1

Podľa Pytagorovej vety pre trojuholník S_1MS_2 je

$$(a-r_1-r_2)^2+(r_1-r_2)^2=(r_1+r_2)^2.$$

Odtiaľ dostávame

$$\begin{aligned}(a-r_1-r_2)^2&=4r_1r_2,\\ a-r_1-r_2&=2\sqrt{r_1r_2},\\ a=r_1+r_2+2\sqrt{r_1r_2}&=\left(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}\right)^2\geqq 4\sqrt{r_1r_2}\end{aligned}$$

čiže

$$r_1r_2\leqq\frac{a^2}{16}.$$

Ďalej zrejme dĺžka úsečky DC nemôže byť väčšia ako dĺžka lomenej čiary KS_1S_2L, a teda

$$2r_1+2r_2\geqq a.$$

(To vyplýva aj z rovnosti $a=r_1+r_2+2\sqrt{r_1r_2}$, lebo podľa AG-nerovnosti je $2\sqrt{r_1r_2}\leqq$ $\leqq r_1+r_2$.)

Preto

$$S=a^2-\frac{3}{2}a(r_1+r_2)+2r_1r_2\leqq a^2-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{8}a^2=\frac{3}{8}a^2.$$

To znamená, že aspoň jeden z obsahov $S_{AS_1S_2}$, $S_{BS_1S_2}$ je najviac $\frac{3}{16}a^2$.

Iné riešenie. Môžeme položiť $a=1$. Rozdiel obsahov trojuholníkov AS_1S_2 a BS_1S_2 je (podľa vyjadrenia z prvého riešenia)

$$S_{AS_1S_2}-S_{BS_1S_2}=(1-r_2)\left(\frac{1}{2}-r_1\right)-(1-r_1)\left(\frac{1}{2}-r_2\right)=\frac{1}{2}(r_2-r_1).$$

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $r_1\geqq r_2$. Potom $S_{AS_1S_2}\leqq S_{BS_1S_2}$. Počítajme teda obsah trojuholníka AS_1S_2. Podľa Pytagorovej vety je $(1-r_1-r_2)^2+$ $+(r_1-r_2)^2=(r_1+r_2)^2$, odtiaľ $\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2}=1$, a teda $r_2=\left(1-\sqrt{r_1}\right)^2$. Označme $x=\sqrt{r_1}$. Z nerovností $r_1+r_2\geqq\frac{1}{2}$ a $r_1\geqq r_2$ vyplýva $r_1\geqq\frac{1}{4}$ a z druhej strany platí $r_1\leqq\frac{1}{2}$, pretože kružnica k_1 leží vo štvorci $ABCD$. Odtiaľ vyplýva $\frac{1}{2}\leqq x\leqq\sqrt{\frac{1}{2}}$. Obsah trojuholníka AS_1S_2 je

$$\begin{aligned}S_{AS_1S_2}&=(1-r_2)\left(\frac{1}{2}-r_1\right)=\frac{1}{2}-r_1-\frac{r_2}{2}+r_1r_2=\\ &=\frac{1}{2}-x^2-\frac{1}{2}(1-x)^2+x^2(1-x)^2=x^4-2x^3-\frac{1}{2}x^2+x;\\ S_{AS_1S_2}-\frac{3}{16}&=x^4-2x^3-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{16}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{8}\right)=\\ &=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[x^2\left(x-\frac{3}{2}\right)-\frac{5}{4}\left(x-\frac{3}{10}\right)\right]\leqq 0\end{aligned}$$

vďaka tomu, že $\frac{3}{10}<\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2}\sqrt{2}<\frac{3}{2}$. Preto $S_{AS_1S_2}\leqq\frac{3}{16}$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že pre polomery r_1, r_2 platí nerovnosť $r_1 + r_2 \geqq \frac{1}{2}a$ a rovnosť $\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} = \sqrt{a}$.

N2. Označme G ten bod strednej priečky štvorca $ABCD$ rovnobežnej so stranou AD, ktorého vzdialenosť od strany AB je trojnásobkom vzdialenosti od strany CD. Dokážte, že G leží vnútri kružnice k_1 práve vtedy, keď $r_1 > \frac{a}{4}$.

N3. Dokážte, že nemôžu súčasne platiť nerovnosti $r_1 > \frac{a}{4}$ a $r_2 > \frac{a}{4}$.

N4. Dokážte, že obsah trojuholníka AS_1S_2 je menší ako obsah trojuholníka BS_1S_2 práve vtedy, keď $r_1 > r_2$.

N5. Dokážte, že aspoň jeden z trojuholníkov AS_1S_2, BS_1S_2 má obsah najmenej $\frac{3}{16}a^2$.

N6. Je daná kružnica $k_1(S_1, r_1)$ a kružnica $k_2(S_2, r_2)$, kde $r_2 < r_1$. Tieto kružnice majú vnútorný dotyk v bode A. Zostrojte kružnicu k_3, ktorá má vnútorný dotyk s kružnicou k_1, vonkajší dotyk s kružnicou k_2 a dotýka sa priamky AS_1. [15–A–II–3]

N7. Dve kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ sa zvonku dotýkajú a ležia vo štvorci $ABCD$ o strane a tak, že k_1 sa dotýka strán AD a CD a k_2 sa dotýka strán BC a AB. Vypočítajte obsah trojuholníka AS_1S_2. [$\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)a^2$]

---

3. *Označme $p(n)$ počet všetkých n-ciferných čísel zložených len z cifier* 1, 2, 3, 4, 5, *v ktorých sa každé dve susedné cifry líšia aspoň o* 2. *Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí*

$$5 \cdot 2{,}4^{n-1} \leqq p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

(*Pavel Novotný*)

Riešenie. Odtrhnutím poslednej číslice vyhovujúceho $(n+1)$-ciferného čísla dostaneme vyhovujúce n-ciferné číslo. Všimnime si, ako naopak z vyhovujúceho n-ciferného čísla vytvoríme vyhovujúce $(n+1)$-ciferné číslo. Ak sa končí n-ciferné číslo číslicou 1, môžeme na koniec pridať niektorú z číslic 3, 4, 5. Za číslicu 2 môžeme pridať niektorú z číslic 4, 5, za číslicou 3 môže nasledovať 1 alebo 5, za číslicou 4 môže byť 1 alebo 2 a za číslicu 5 môžeme pridať jednu z číslic 1, 2, 3. Vidíme, že záleží na tom, aká je posledná číslica. Označme preto a_n počet vyhovujúcich čísel zakončených niektorou z číslic 1, 5, b_n počet čísel zakončených niektorou z číslic 2, 4 a c_n počet čísel zakončených číslicou 3. Potom $p(n) = a_n + b_n + c_n$. Zrejme $a_1 = b_1 = 2$, $c_1 = 1$, $p(1) = 5 = 5 \cdot 2{,}4^0 = 5 \cdot 2{,}5^0$, $a_2 = 6$, $b_2 = 4$, $c_2 = 2$, $p(2) = 12 = 5 \cdot 2{,}4^1 < 5 \cdot 2{,}5^1$.

Z predchádzajúcich úvah vyplýva platnosť rekurentných vzťahov

$$a_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n, \quad c_{n+1} = a_n. \tag{1}$$

Z nich vyplýva $a_3 = 14$, $b_3 = 10$, $c_3 = 6$, $p(3) = 30 \in \langle 5 \cdot 2{,}4^2; 5 \cdot 2{,}5^2 \rangle$.

Matematickou indukciou dokážeme, že pre každé $n \geqq 3$ platí

$$a_n \geqq 2{,}4^n, \quad b_n \geqq \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n, \quad c_n \geqq 2{,}4^{n-1}.$$

Pre $n = 3$ to platí. Ak $a_n \geqq 2{,}4^n$, $b_n \geqq \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n$ a $c_n \geqq 2{,}4^{n-1}$, tak aj

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n &\geqq 2{,}4^n + \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n + 2 \cdot 2{,}4^{n-1} = \\ &= 2{,}4^n \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}\right) = 2{,}5 \cdot 2{,}4^n > 2{,}4^{n+1}, \\ b_{n+1} = a_n + b_n &\geqq 2{,}4^n + \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n = \frac{5}{3} \cdot 2{,}4^n > \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^{n+1}, \\ c_{n+1} = a_n &\geqq 2{,}4^n. \end{aligned}$$

Z práve dokázaných nerovností vyplýva

$$p(n) = a_n + b_n + c_n \geqq 2{,}4^n + \frac{2}{3} \cdot 2{,}4^n + 2{,}4^{n-1} = (2{,}4 + 1{,}6 + 1) \cdot 2{,}4^{n-1} = 5 \cdot 2{,}4^{n-1}.$$

Podobne dokážeme druhú nerovnosť; dokážeme, že pre $n \geqq 3$ platí

$$a_n \leqq k \cdot 2{,}5^n, \quad b_n \leqq k \cdot \frac{2}{3} \cdot 2{,}5^n, \quad c_n \leqq k \cdot 2{,}5^{n-1}, \tag{2}$$

kde k je vhodne zvolené číslo. Potom bude

$$p(n) = a_n + b_n + c_n \leqq k \cdot 2{,}5^{n-1} \cdot \left(2{,}5 + \frac{5}{3} + 1\right) = k \cdot 2{,}5^{n-1} \cdot \frac{31}{6} = 5k \cdot \frac{31}{30} \cdot 2{,}5^{n-1}.$$

Ak teda zvolíme $k = \frac{30}{31}$, bude pre každé $n \geqq 3$ platiť $p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}$.

Ostáva matematickou indukciou dokázať nerovnosti (2), v ktorých $k = \frac{30}{31}$. Pre $n = 3$ nerovnosti platia. Ak platí (2), tak aj

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n + b_n + 2c_n &\leqq k \cdot 2{,}5^n \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{5}\right) = k \cdot 2{,}5^n \cdot \frac{37}{15} < k \cdot 2{,}5^{n+1}, \\ b_{n+1} = a_n + b_n &\leqq k \cdot 2{,}5^n \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) = k \cdot \frac{2}{3} \cdot 2{,}5^{n+1}, \\ c_{n+1} = a_n &\leqq k \cdot 2{,}5^n. \end{aligned}$$

Iné riešenie. Ukážeme, že každá z postupností $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, ktoré boli zavedené v prvom riešení, spĺňa v dôsledku rovností (1) rekurentnú rovnicu $x_{n+2} = 2x_{n+1} + 2x_n - 2x_{n-1}$, takže ju spĺňa aj postupnosť skúmaných hodnôt $p(n) = a_n + b_n + c_n$, čo ďalej zapíšeme vzťahom (3).

Naozaj, z prvej a tretej rovnosti v (1) dostávame $a_{n+1} = a_n + b_n + 2a_{n-1}$, odkiaľ

$$b_n = a_{n+1} - a_n - 2a_{n-1}, \quad \text{a teda aj} \quad b_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n.$$

Vzhľadom na druhú rovnosť v (1) tak platí

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = b_{n+1} = a_n + b_n = a_n + (a_{n+1} - a_n - 2a_{n-1}),$$

odkiaľ porovnaním krajných výrazov vychádza avizovaná rovnosť

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 2a_n - 2a_{n-1}.$$

Teraz trikrát dosadíme $a_n = b_{n+1} - b_n$ do rovnosti $b_n = a_{n+1} - a_n - 2a_{n-1}$ a dostaneme

$$b_n = (b_{n+2} - b_{n+1}) - (b_{n+1} - b_n) - 2(b_n - b_{n-1}),$$

odkiaľ po úprave vychádza

$$b_{n+2} = 2b_{n+1} + 2b_n - 2b_{n-1}.$$

Napokon, postupnosť $\{c_n\}$ je len „posunutá“ postupnosť $\{a_n\}$, takže

$$c_{n+2} = a_{n+1} = 2a_n + 2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 2c_{n+1} + 2c_n - 2c_{n-1}.$$

Spojením všetkých troch rekurencií máme

$$p(n+2) = 2p(n+1) + 2p(n) - 2p(n-1). \tag{3}$$

Matematickou indukciou dokážeme, že pre každé $k \geqq 1$ platí

$$2{,}4p(k) \leqq p(k+1) \leqq 2{,}5p(k). \tag{4}$$

Pre $k = 1$ aj pre $k = 2$ nerovnosti (4) platia. Ak platí (4) pre všetky $k \in \in \{1, 2, \dots, n+1, n+2\}$, potom

$$\begin{aligned} p(n+3) &= 2\bigl(p(n+2) + p(n+1) - p(n)\bigr) \geqq \\ &\geqq 2\Bigl(p(n+2) + p(n+1) - \frac{p(n+1)}{2{,}4}\Bigr) = 2\Bigl(p(n+2) + \frac{7p(n+1)}{12}\Bigr) \geqq \\ &\geqq 2\Bigl(p(n+2) + \frac{7}{12} \cdot \frac{p(n+2)}{2{,}5}\Bigr) = \frac{74p(n+2)}{30} > 2{,}4p(n+2). \end{aligned}$$

Podobne tiež

$$\begin{aligned} p(n+3) &\leqq 2\Bigl(p(n+2) + p(n+1) - \frac{p(n+1)}{2{,}5}\Bigr) \leqq \\ &\leqq 2\Bigl(p(n+2) + \frac{3}{5} \cdot \frac{p(n+2)}{2{,}4}\Bigr) = 2{,}5p(n+2). \end{aligned}$$

Z rovností $5 \cdot 2{,}4^0 = p(1) = 5 \cdot 2{,}5^0$ a nerovností (4) vyplýva, že nerovnosť $5 \cdot \cdot 2{,}4^{n-1} \leqq p(n) \leqq 5 \cdot 2{,}5^{n-1}$ platí pre každé prirodzené n.

Poznámka. Rovnica (3) sa nazýva *lineárna diferenčná rovnica s konštantnými koeficientmi.* Známy rekurentný vzťah $g_{n+1} = g_n \cdot q$ pre geometrické postupnosti napovedá, že rovnici (3) by mohli vyhovovať niektoré geometrické postupnosti, teda $p(n) = q^n$. Dosadením do (3) dostaneme pre kvocient q tzv. *charakteristickú rovnicu*

$$q^3 - 2q^2 - 2q + 2 = 0,$$

ktorá má tri reálne korene $q_1 \doteq -1{,}170\,086\,487$, $q_2 \doteq 0{,}688\,892\,182$, $q_3 \doteq 2{,}481\,194\,304$. Dá sa dokázať, že každé riešenie rovnice (3) je lineárnou kombináciou postupností $\{q_1^n\}$, $\{q_2^n\}$ a $\{q_3^n\}$, teda

$$p(n) = \alpha \cdot q_1^n + \beta \cdot q_2^n + \gamma \cdot q_3^n.$$

Koeficienty α, β, γ vypočítame zo sústavy rovníc

$$\alpha q_1 + \beta q_2 + \gamma q_3 = p(1) = 5, \quad \alpha q_1^2 + \beta q_2^2 + \gamma q_3^2 = p(2) = 12, \quad \alpha q_1^3 + \beta q_2^3 + \gamma q_3^3 = p(3) = 30.$$

Namiesto tretej rovnice sa dá použiť $\alpha + \beta + \gamma = p(0) = 2$; číslo $p(0)$ sa síce nedá definovať ako počet 0-ciferných čísel, ale $p(0) = 2$ odpovedá vzťahu (3). Pre členy postupnosti tak dostaneme približné vyjadrenie

$$p(n) \approx -0{,}063\,627\,546q_1^n + 0{,}108\,637\,179q_2^n + 1{,}954\,990\,367q_3^n.$$

(Táto približná rovnosť sa dá použiť zhruba po $n = 20$, pre väčšie n už sa prejavia zaokrúhľovacie chyby.)

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Označme p_n počet všetkých n-ciferných čísel zložených len z číslic 1 a 2, v ktorých se nevyskytujú dve jednotky vedľa seba. Dokážte, že $p_n = F_{n+3}$, kde F_k je k-ty člen Fibonacciho postupnosti.

N2. Označme p_n počet všetkých n-ciferných čísel zložených len z číslic 1, 2, 3, v ktorých sa nevyskytujú tri rovnaké číslice vedľa seba. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n platí $p_n > 2{,}7^n$.

N3. Označme p_n počet všetkých n-ciferných čísel, v ktorých desiatkovom zápise sa vyskytujú vedľa seba dve nuly. Dokážte, že

$$p_n = 9 \cdot 10^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{117}} \cdot \left[\left(\frac{9+\sqrt{117}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{9-\sqrt{117}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

D1. Po vrcholoch pravidelného osemuholníka $ABCDEFGH$ skáče klokan. Každým skokom sa premiestni z jedného vrcholu do niektorého z oboch susedných; začína v A a zastaví sa, akonáhle sa prvýkrát dostane do E. Označme a_n počet všetkých rôznych ciest z A do E zložených práve z n skokov. Dokážte, že pre všetky $k = 1, 2, 3, \ldots$ platí

$$a_{2k-1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{k-1} - y^{k-1}),$$

pričom $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 - \sqrt{2}$. [21. MMO, 1979]

---

4. *Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky nenulové čísla x, y platí*

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot f(x).$$

(*Pavel Calábek*)

Riešenie. Dosadením $x = 1$ dostaneme

$$f(y) + f(-y) = f(1).$$

Ak označíme $f(1) = a$, máme $f(-y) = a - f(y)$. Ďalej dosadíme $y = -1$ a máme

$$x \cdot f(-x) + f(1) = x \cdot f(x),$$

čiže

$$x\bigl(a - f(x)\bigr) + a = x \cdot f(x)$$

a odtiaľ

$$f(x) = \frac{a(x+1)}{2x} = \frac{a}{2}\Bigl(1 + \frac{1}{x}\Bigr).$$

Skúškou overíme, že pre ľubovoľné reálne c vyhovuje každá funkcia $f(x) = c(1 + 1/x)$:

$$x \cdot f(xy) + f(-y) = x \cdot c\Bigl(1 + \frac{1}{xy}\Bigr) + c\Bigl(1 + \frac{1}{-y}\Bigr) = c\Bigl(x + \frac{1}{y} + 1 - \frac{1}{y}\Bigr) =$$
$$= c(x+1) = cx\Bigl(1 + \frac{1}{x}\Bigr) = x \cdot f(x).$$

Iné riešenie. Označme $f(1) = a$. Dosadením $y = -1$ do danej rovnice dostaneme

$$xf(-x) + a = xf(x)$$

a odtiaľ
$$f(-x) = f(x) - \frac{a}{x}. \tag{1}$$
Danú rovnicu upravíme na tvar
$$f(xy) + \frac{1}{x} \cdot f(-y) = f(x)$$
a po použití (1) máme
$$f(xy) + \frac{1}{x}\Big(f(y) - \frac{a}{y}\Big) = f(x),$$
$$f(xy) + \frac{f(y)}{x} - \frac{a}{xy} = f(x).$$
Zámenou x a y navyše dostaneme
$$f(yx) + \frac{f(x)}{y} - \frac{a}{yx} = f(y),$$
takže odčítaním posledných dvoch rovníc
$$\frac{f(x)}{y} - \frac{f(y)}{x} = f(y) - f(x)$$
a po dosadení $y = 1$ vyjde
$$2f(x) = a\Big(1 + \frac{1}{x}\Big).$$
Opäť sa skúškou presvedčíme, že každá funkcia $f(x) = c(1 + 1/x)$ je riešením.

Iné riešenie. Dosadením $y = -1$ dostaneme
$$xf(-x) + f(1) = xf(x),$$
po úprave
$$f(x) - f(-x) = \frac{f(1)}{x}. \tag{2}$$
Dosadením $x = 1$ dostaneme
$$f(y) + f(-y) = f(1),$$
teda aj
$$f(x) + f(-x) = f(1) \tag{3}$$
a po sčítaní rovníc (2) a (3) máme $f(x) = \dfrac{f(1)}{2}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$; opäť ostáva urobiť jednoduchú skúšku.

Návodné a doplňujúce úlohy:

D1. Nájdite všetky funkcie $f\colon \langle 0,\infty) \to \langle 0,\infty)$, ktoré spĺňajú zároveň tri nasledovné podmienky:

a) Pre ľubovoľné nezáporné čísla x a y také, že $x+y>0$, platí rovnosť

$$f\left(xf(y)\right)f(y)=f\left(\frac{xy}{x+y}\right);$$

b) $f(1)=0$;

c) $f(x)>0$ pre ľubovoľné $x>1$. [54–A–I–6]

D2. Nech $\mathbb{R}^+$ značí množinu všetkých kladných reálnych čísel. Určte všetky funkcie $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, ktoré pre všetky kladné čísla x, y spĺňajú rovnosť

$$x^2\left(f(x)+f(y)\right)=(x+y)f\left(f(x)y\right).$$

[53–A–III–6]

D3. Nech $\mathbb{R}^+$ značí množinu všetkých kladných reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ spĺňajúce pre ľubovoľné $x, y \in \mathbb{R}^+$ rovnosť

$$f\left(xf(y)\right)=f(xy)+x.$$

[51–A–III–6]

D4. Nech $\mathbb{R}^+$ je množina všetkých kladných reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R}^+ \to \to \mathbb{R}^+$ také, že pre všetky $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(x)\cdot f(y)=f(y)\cdot f\left(x\cdot f(y)\right)+\frac{1}{xy}.$$

[60–A–III–6]

Užitočné informácie o funkcionálnych rovniciach sú napríklad na

`http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~franta/bakalarka`.

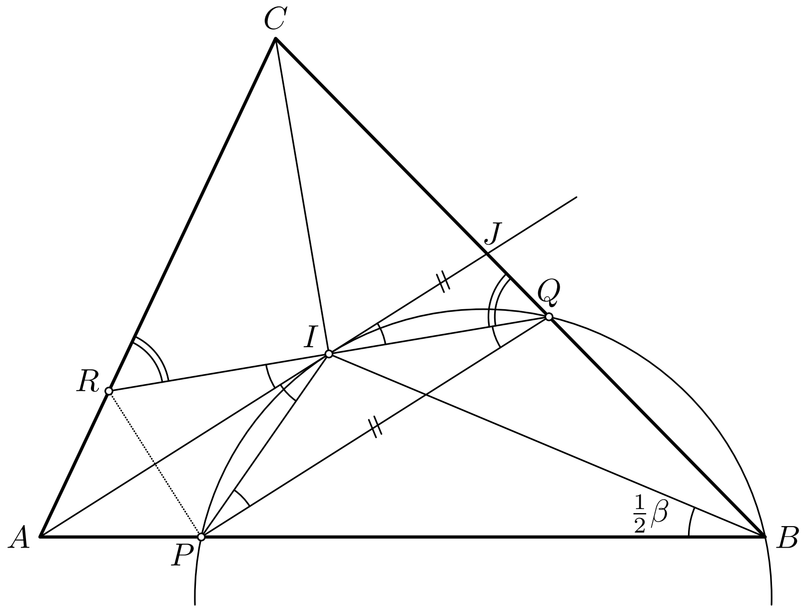
---

5. *Označme I stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Kružnica, ktorá prechádza vrcholom B a dotýka sa priamky AI v bode I, pretína strany AB, BC postupne v bodoch P, Q. Priesečník priamky QI so stranou AC označme R. Dokážte, že platí*

$$|AR|\cdot|BQ|=|PI|^2.$$

(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Označme α, β, γ veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC pri vrcholoch A, B, C a J priesečník priamky AI so stranou BC (obr. 2). Uhol PBI je obvodový uhol príslušný k tetive PI a uhol QBI je obvodový uhol príslušný k tetive IQ. Pretože oba tieto obvodové uhly majú rovnakú veľkosť $\frac{1}{2}\beta$, majú úsečky PI a IQ rovnakú dĺžku.



Obr. 2

Úsekový uhol JIQ je zhodný s obvodovým uhlom QBI, jeho veľkosť je preto $\frac{1}{2}\beta$. Zo zhodnosti vrcholových uhlov potom vyplýva $|\measuredangle RIA| = \frac{1}{2}\beta$. Tú istú veľkosť má i úsekový uhol PIA, ktorý je zhodný s obvodovým uhlom PBI. Ďalej platí $|\measuredangle RAI| = |\measuredangle PAI| = \frac{1}{2}\alpha$. Podľa vety *usu* sú trojuholníky RIA a PIA zhodné, a preto $|RI| = |PI|$.

Uhol QIB má veľkosť

$$|\measuredangle QIB| = 180^\circ - |\measuredangle AIB| - |\measuredangle JIQ| = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right) - \frac{\beta}{2} = \\ = 90^\circ - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} = |\measuredangle RAI|.$$

Veľkosť uhla QIB se dá určiť i nasledovne: Podľa vety o úsekovom uhle platí $|\measuredangle AIP| = \frac{1}{2}\beta = |\measuredangle IPQ|$. Zo zhodnosti striedavých uhlov vyplýva $AI \parallel PQ$. Odtiaľ $|\measuredangle QPB| = |\measuredangle IAB| = \frac{1}{2}\alpha$ a zo zhodnosti obvodových uhlov máme $|\measuredangle QIB| = \frac{1}{2}\alpha$.

Zo zhodnosti uhlov $|\measuredangle QIB| = |\measuredangle RAI|$ a $|\measuredangle QBI| = |\measuredangle RIA|$ vyplýva podobnosť trojuholníkov $AIR \sim IBQ$ a odtiaľ $|AR|/|RI| = |IQ|/|QB|$, takže

$$|AR| \cdot |QB| = |RI| \cdot |IQ| = |PI|^2.$$

Na dôkaz podobnosti trojuholníkov AIR a IBQ môže poslúžiť i rovnoramennosť trojuholníka CRQ, v ktorom os uhla je súčasne ťažnicou.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Dokážte, že v danej situácii platí:
   a) $|\measuredangle JIQ| = |\measuredangle RIA| = |\measuredangle PIA| = |\measuredangle IPQ| = |\measuredangle PBI| = |\measuredangle QBI| = \frac{1}{2}\beta$;
   b) $PQ \parallel AI$;
   c) $|\measuredangle QIB| = |\measuredangle QPB| = |\measuredangle IAP| = |\measuredangle RAI| = \frac{1}{2}\alpha$;
   d) $|CR| = |CQ|$;
   e) $|\measuredangle BQR| = |\measuredangle ARQ| = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$.

D1. Do kružnice k je vpísaný štvoruholník $ABCD$, ktorého uhlopriečka BD nie je priemerom. Dokážte, že priesečník priamok, ktoré sa kružnice k dotýkajú v bodoch B a D, leží na priamke AC práve vtedy, keď platí $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$. [51–A–II–3]

D2. Daný je rovnobežník $ABCD$ s tupým uhlom ABC. Na jeho uhlopriečke AC v polrovine BDC zvoľme bod P tak, aby platilo $|\measuredangle BPD| = |\measuredangle ABC|$. Dokážte, že priamka CD je dotyčnicou ku kružnici opísanej trojuholníku BCP práve vtedy, keď úsečky AB a BD sú zhodné. [59–A–II–2]

D3. Nech M je ľubovoľný vnútorný bod prepony AB pravouhlého trojuholníka ABC. Označme S, S_1, S_2 stredy kružníc opísaných postupne trojuholníkom ABC, AMC, BMC.
   a) Dokážte, že body M, C, S_1, S_2 a S ležia na jednej kružnici.
   b) Pre ktorú polohu bodu M má táto kružnica najmenší polomer? [56–A–II–3]

D4. Nech L je ľubovoľný vnútorný bod kratšieho oblúka kružnice opísanej štvorcu $ABCD$. Označme K priesečník priamok AL a CD, M priesečník priamok AD a CL a N priesečník priamok MK a BC. Dokážte, že body B, L, M, N ležia na tej istej kružnici. [53–A–III–5]

---

6. *V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc*

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 y &= \operatorname{tg}^2 z,\\ \sin^2 y + \cos^2 z &= \operatorname{tg}^2 x,\\ \sin^2 z + \cos^2 x &= \operatorname{tg}^2 y.\end{aligned}$$

(*Pavel Calábek*)

Riešenie. Substitúciou $\cos^2 x = a$, $\cos^2 y = b$, $\cos^2 z = c$ vznikne sústava

$$\begin{aligned}1 - a + b &= \frac{1}{c} - 1,\\ 1 - b + c &= \frac{1}{a} - 1,\\ 1 - c + a &= \frac{1}{b} - 1,\end{aligned} \tag{1}$$

pričom $a, b, c \in (0, 1\rangle$.

Sčítaním týchto rovníc dostaneme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 6,$$

teda harmonický priemer čísel a, b, c je $\frac{1}{2}$.

Po vynásobení rovníc postupne číslami c, a, b máme

$$\begin{aligned}c - ac + bc &= 1 - c,\\ a - ab + ac &= 1 - a,\\ b - bc + ab &= 1 - b\end{aligned}$$

a po sčítaní $2(a+b+c) = 3$. Aritmetický priemer čísel a, b, c je teda taktiež $\frac{1}{2}$. Z rovnosti aritmetického a harmonického priemeru vyplývajú rovnosti $a = b = c = \frac{1}{2}$. Skúškou sa ľahko presvedčíme, že táto trojica vyhovuje sústave (1). Riešením danej sústavy sú všetky trojice $(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi, \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}l\pi, \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}m\pi)$, kde k, l, m sú celé čísla.

Iné riešenie. Použijeme substitúciu z prvého riešenia. Sústava (1) je cyklická; ak je jej riešením trojica (p, q, r), vyhovujú aj trojice (q, r, p) a (r, p, q). Stačí teda nájsť všetky riešenia, pre ktoré platí $a \geqq b, a \geqq c$, a všetky ostatné dostaneme cyklickou zámenou.

Nech teda $a \geqq b, a \geqq c$. Z prvej rovnice potom vyplýva $1/c = 2 - a + b \leqq 2$, a preto $c \geqq \frac{1}{2}$. Podobne z tretej rovnice $1/b = 2 - c + a \geqq 2$, preto $b \leqq \frac{1}{2}$, a teda aj $b \leqq c$. Podľa druhej rovnice potom $1/a = 2 - b + c \geqq 2$, takže $a \leqq \frac{1}{2}$. Dokopy teda platí

$$\frac{1}{2} \geqq a \geqq c \geqq \frac{1}{2},$$

a preto $a = c = \frac{1}{2}$. Teraz už z ktorejkoľvek rovnice dostaneme $b = \frac{1}{2}$. Rovnako ako v prvom riešení overíme, že nájdená trojica sústave (1) vyhovuje a vyjadríme všeobecné riešenie zadanej sústavy.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nerovnosť
$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqq \frac{n}{1/a_1 + 1/a_2 + \ldots + 1/a_n}$$
medzi aritmetickým a harmonickým priemerom ľubovoľných kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ odvoďte dvojakým použitím známejšej nerovnosti medzi aritmetickým a geometrickým priemerom. Ukážte pritom, že rovnosť v odvodenej nerovnosti nastane jedine vtedy, keď $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. [Odporúčanú AG-nerovnosť zapíšte ako pre n-ticu uvažovaných čísel a_i, tak pre n-ticu čísel k nim prevrátených a zapísané nerovnosti potom medzi sebou vynásobte. Tvrdenie o rovnosti vyplýva z podobného tvrdenia o rovnosti v AG-nerovnosti.]

D1. V množine reálnych čísel riešte sústavu rovníc
$$x^2 + \frac{1}{y^2} = 2, \quad y^2 + \frac{1}{z^2} = 2, \quad z^2 + \frac{1}{w^2} = 2, \quad w^2 + \frac{1}{x^2} = 2.$$
[$x^2 = y^2 = z^2 = w^2 = 1$, teda 16 riešení]

D2. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc
$$x^2 - y = z^2, \quad y^2 - z = x^2, \quad z^2 - x = y^2.$$
[57–A–S–1]

D3. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc
$$\sqrt{x - y^2} = z - 1, \quad \sqrt{y - z^2} = x - 1, \quad \sqrt{z - x^2} = y - 1.$$
[59–A–S–1]

D4. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc
$$\sqrt{x^2 - y} = z - 1, \quad \sqrt{y^2 - z} = x - 1, \quad \sqrt{z^2 - x} = y - 1.$$
[59–A–I–1]

D5. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc
$$x^2 + 2yz = 6(y + z - 2), \quad y^2 + 2zx = 6(z + x - 2), \quad z^2 + 2xy = 6(x + y - 2).$$
[53–A–S–3]

D6. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc
$$x^2 = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad y^2 = \frac{1}{z} + \frac{1}{x}, \quad z^2 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$
[53–A–I–6]

D7. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc
$$x(y + z + 1) = y^2 + z^2 - 5, \; y(z + x + 1) = z^2 + x^2 - 5, \; z(x + y + 1) = x^2 + y^2 - 5.$$
[54–A–II–2]

D8. V obore reálnych čísel vyriešte sústavu rovníc
$$x^2 - 1 = p(y + z), \quad y^2 - 1 = p(z + x), \quad z^2 - 1 = p(x + y)$$
s neznámymi x, y, z a parametrom p. Vykonajte diskusiu počtu riešení. [51–A–II–4]

D9. V obore reálnych čísel riešte sústavu rovníc
$$x^4 + y^2 + 4 = 5yz, \quad y^4 + z^2 + 4 = 5zx, \quad z^4 + x^2 + 4 = 5xy.$$
[61–A–III–6]

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Karel Horák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Jaromír Šimša

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012