60. ročník Matematickej olympiády
2010/2011 *Riešenia úloh česko-poľsko-slovenského stretnutia*

---

1. *Nech a, b, c sú kladné reálne čísla také, že $a^2 < bc$. Dokážte, že $b^3 + ac^2 > ab(a+c)$.*
(*Pavel Novotný*)

Riešenie. Sčítaním troch AG-nerovností

$$4a^3b + b^3c + 2c^3a \geqq 7a^2bc,$$
$$4b^3c + c^3a + 2a^3b \geqq 7b^2ca,$$
$$4c^3a + a^3b + 2b^3c \geqq 7c^2ab$$

dostaneme

$$a^3b + b^3c + c^3a \geqq a^2bc + b^2ca + c^2ab. \tag{1}$$

Z predpokladu $a^2 < bc$ vynásobením ab vyplýva $b^2ca > a^3b$, čo spolu s (1) dáva

$$b^3c + c^3a > a^2bc + c^2ab \quad \text{čiže} \quad b^3 + ac^2 > ab(a+c).$$

Iné riešenie. Podľa AG-nerovnosti a danej nerovnosti platí

$$\tfrac{2}{5}b^3 + \tfrac{3}{5}ac^2 \geqq \sqrt[5]{b^6a^3c^6} = bc\sqrt[5]{a^3bc} > abc,$$
$$\tfrac{3}{5}b^3 + \tfrac{2}{5}ac^2 \geqq \sqrt[5]{b^9a^2c^4} = b\sqrt[5]{a^2b^4c^4} > a^2b.$$

Ich sčítaním získame hľadaný odhad.

---

2. *Na tabuli je napísaných n nezáporných celých čísel, ktorých najväčší spoločný deliteľ je 1. V jednom kroku môžeme zotrieť dve také čísla x, y, že $x \geqq y$ a nahradiť ich dvojicou čísel $x-y$, $2y$. Určte, pre ktoré n-tice pôvodných čísel môžeme dosiahnuť stav, keď medzi číslami na tabuli bude $n-1$ núl.* (*Poľsko*)

Riešenie. *Odpoveď.* Súčet daných čísel musí byť mocnina čísla 2.

Predpokladajme, že dané čísla nie sú všetky nulové. Označme S ich celkový súčet a D ich najväčší spoločný deliteľ. Na začiatku je $D = 1$, zatiaľ čo na konci by malo byť $D = S$, pritom súčet S všetkých čísel na tabuli sa nemení.

Po každom opísanom kroku sa aktuálna hodnota D buď nezmení, alebo narastie na dvojnásobok. To vyplýva z toho, že buď $\mathrm{nsd}(x-y, 2y) = \mathrm{nsd}(x-y, y) = \mathrm{nsd}(x, y)$, alebo $\mathrm{nsd}(x-y, 2y) = 2\,\mathrm{nsd}(x-y, y) = 2\,\mathrm{nsd}(x, y)$. Vzhľadom na to, že $\mathrm{nsd}(a, b, c) = \mathrm{nsd}\big(\mathrm{nsd}(a, b), c\big)$, ľahko uvedený postreh rozšírime na najväčšieho spoločného deliteľa všetkých čísel na tabuli. Ak teda zostane nakoniec na tabuli jediné nenulové číslo, musí tým číslom byť mocnina dvoch.

Ak je naopak S mocninou čísla 2, ukážeme, ako postupovať, aby sme dostali $n-1$ núl. Zapíšme všetky čísla na tabuli v dvojkovej sústave. Ak sú na tabuli ešte aspoň dve nenulové čísla, vezmeme dve z nich, ktorých zápis končí najmenším počtom núl (také čísla sú aspoň dve, keďže celkový súčet je mocnina dvoch). Po opísanej operácii namiesto nich zrejme dostaneme dve čísla, ktoré majú na konci aspoň o jednu nulu viac. Je teda jasné, že po konečnom počte krokov musíme skončiť tým, že na tabuli bude jediné nenulové číslo.

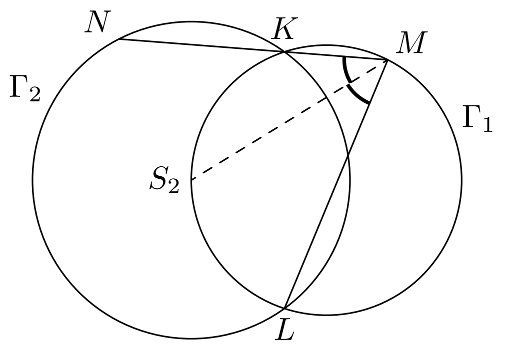
3. *Body A, B, C, D ležia v tomto poradí na kružnici, pričom $AB \nparallel CD$ a dĺžka oblúka AB, ktorý obsahuje body C, D, je dvakrát väčšia ako dĺžka oblúka CD, ktorý neobsahuje body A, B. Nech E je taký bod v polrovine ABC, že $|AC| = |AE|$ a $|BD| = |BE|$. Dokážte, že ak kolmica z bodu E na priamku AB prechádza stredom oblúka CD neobsahujúceho body A, B, tak $|\measuredangle ACB| = 108°$.* (Tomáš Jurík)

Riešenie. Najskôr sformulujeme a dokážeme pomocné tvrdenie.

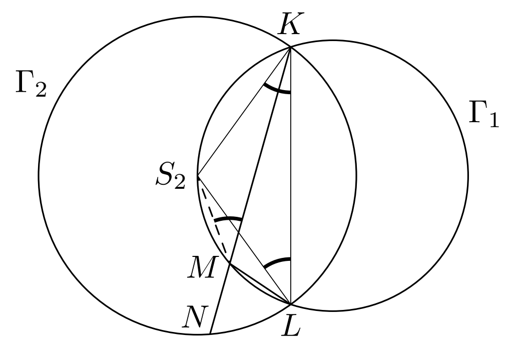
Lema. Dané sú kružnice Γ_1, Γ_2 pretínajúce sa v bodoch K, L, pričom stred S_2 kružnice Γ_2 leží na Γ_1. Ak $M \in \Gamma_1$ ($M \neq K, L$) a priamka KM pretína Γ_2 v bode N (rôznom od K), tak $|MN| = |ML|$.

Dôkaz. Ak $M = S_2$, tvrdenie lemy je triviálne. Zaoberajme sa len prípadom $M \neq S_2$. Najskôr dokážeme, že priamka MS_2 je osou uhla NML.

Ak M leží na oblúku KL neobsahujúcom S_2 (obr. 1a), tak uhly KMS_2, S_2ML sú obvodovými uhlami nad zhodnými tetivami S_2K, S_2L, teda majú rovnakú veľkosť. Ak M leží na oblúku KL obsahujúcom S_2, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že leží na oblúku S_2L neobsahujúcom bod K (obr. 1b). Potom s využitím tetivovosti štvoruholníka KS_2ML máme $|\measuredangle S_2MN| = 180° - |\measuredangle S_2MK| = 180° - |\measuredangle S_2LK| = 180° - |\measuredangle S_2KL| = |\measuredangle S_2ML|$.



Obr. 1a



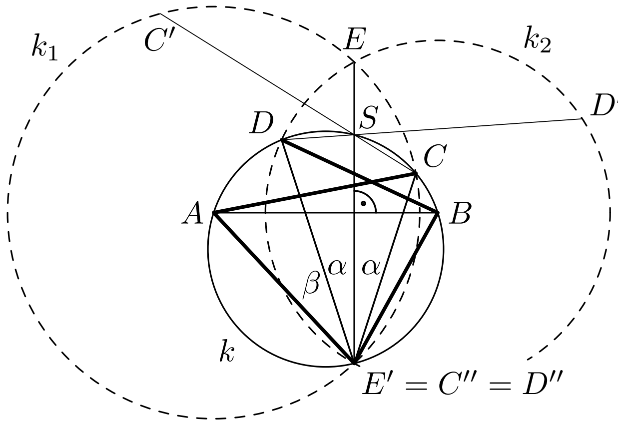
Obr. 1b

Uvažujme osovú súmernosť podľa osi MS_2. V nej sa kružnica Γ_2 zobrazí sama na seba (lebo jej stred leží na osi súmernosti). Priamka ML sa zobrazí na priamku MN (lebo MS_2 je osou uhla NML). Takže množina $ML \cap \Gamma_2$ sa zobrazí na množinu $MN \cap \Gamma_2 = \{K, N\}$. Keďže $L \in ML \cap \Gamma_2$, musí sa L zobraziť na K alebo N. Avšak okrem prípadu, keď MS_2 je priemerom Γ_1, priamky KL a MS_2 nie sú navzájom kolmé, teda L sa nemôže zobraziť na K a musí sa zobraziť na N, odkiaľ $|ML| = |MN|$. Prípad, keď MS_2 je priemerom Γ_1, nemusíme brať do úvahy, keďže vtedy MK je dotyčnicou kružnice Γ_2, čiže ju nepretína v ďalšom bode $N \neq K$. □

Označme S priesečník kolmice na AB vedenej cez E a oblúka CD. Nech k_1 je kružnica so stredom A prechádzajúca bodom C a k_2 je kružnica so stredom B prechádzajúca bodom D. Kružnicu opísanú tetivovému štvoruholníku $ABCD$ označme k. Priamka SC pretína kružnicu k_1 v C' a priamka SD kružnicu k_2 v D'. Nech $k \cap k_1 = \{C, C''\}$, $k \cap k_2 = \{D, D''\}$. Priesečník kružníc k_1, k_2 rôzny od E označme E'. Sporom dokážeme, že $C'' = D'' = E'$.

Bod S leží na chordále kružníc k_1, k_2, preto z jeho mocnosti k týmto kružniciam máme $|SC| \cdot |SC'| = |SD| \cdot |SD'|$. Podľa zadania $|SC| = |SD|$, takže aj $|SC'| = |SD'|$. S využitím pomocnej lemy potom máme $|SC''| = |SC'| = |SD'| = |SD''|$.

Ak by C'', D'' boli rôzne body, trojuholník $SD''C''$ by bol rovnoramenný a jeho výška z vrcholu S by prechádzala stredom kružnice k. Štvoruholník $CDD''C''$ (resp. $CDC''D''$) by bol rovnoramenný lichobežník ($|SC| = |SD|$). Body A, B sa však dajú určiť ako priesečníky osí úsečiek CC'', DD'' s kružnicou k, takže aj $ABCD$ by bol vzhľadom na symetriu rovnoramenný lichobežník, čo je v spore s predpokladom $AB \nparallel CD$.



Obr. 2

Označme $|\measuredangle DE'S| = |\measuredangle SE'C| = \alpha$ a $|\measuredangle AE'D| = \beta$. Potom $|\measuredangle CE'B| = 2\alpha - \beta$, pretože oblúk AB je dvakrát dlhší ako oblúk CD (obr. 2). Z rovností $|BD| = |BE'|$, $|AC| = |AE'|$ vyjadríme veľkosti uhlov v trojuholníku ABE':

$$2\alpha + \beta = |\measuredangle AE'C| = |\measuredangle ACE'| = |\measuredangle ABE'|,$$
$$4\alpha - \beta = |\measuredangle BE'D| = |\measuredangle BDE'| = |\measuredangle BAE'|.$$

Odtiaľ
$$180^\circ = 2\alpha + \beta + 4\alpha - \beta + 4\alpha = 10\alpha, \quad \text{čiže } \alpha = 18^\circ$$
a $|\measuredangle ACB| = 180^\circ - |\measuredangle AE'B| = 180^\circ - 4\alpha = 108^\circ$.

---

4. *Mnohočlen $P(x)$ s celočíselnými koeficientmi spĺňa nasledujúcu podmienku: Ak pre mnohočleny $F(x)$, $G(x)$, $Q(x)$ s celočíselnými koeficientmi platí*

$$P(Q(x)) = F(x) \cdot G(x),$$

tak aspoň jeden z mnohočlenov $F(x)$, $G(x)$ je konštantný. Dokážte, že $P(x)$ je konštantný mnohočlen. (Poľsko)

Riešenie. Dokážeme tvrdenie úlohy sporom. Predpokladajme, že P nie je konštantný, a uvažujme najskôr prípad, keď je mnohočlen P lineárny, teda $P(x) = ax + b$ pre nejaké $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Vezmime $Q(x) = ax^2 + (b+1)x$, potom

$$P(Q(x)) = a(ax^2 + (b+1)x) + b = a^2x^2 + a(b+1)x + b = (ax+b)(ax+1)$$

je rozklad mnohočlena $P(Q(x))$ na súčin dvoch nekonštantných mnohočlenov $ax+b$ a $ax+1$, čo odporuje predpokladu úlohy.

Ak je stupeň mnohočlena P aspoň 2, teda $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$, pričom $n>1$ a $a_n\neq 0$, vezmime mnohočlen $Q(x)=P(x)+x$. Pre mnohočlen $P(Q(x))$, ktorý má stupeň $n^2>n$, platí

$$P(Q(x))-P(x)=P(P(x)+x)-P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i\big((P(x)+x)^i-x^i\big).$$

Z rovností $a^i-b^i=(a-b)(a^{i-1}+a^{i-2}b+\ldots+b^{i-1})$ však vyplýva, že každý z mnohočlenov $(P(x)+x)^i-x^i$ je deliteľný mnohočlenom $P(x)$. Preto aj mnohočlen $P(Q(x))$ je deliteľný mnohočlenom $P(x)$. To vedie opäť k sporu, pretože stupeň mnohočlena $P(Q(x))$ je väčší ako stupeň mnohočlena $P(x)$, a ten je teda netriviálnym deliteľom mnohočlena $P(Q(x))$. Tým je tvrdenie dokázané.

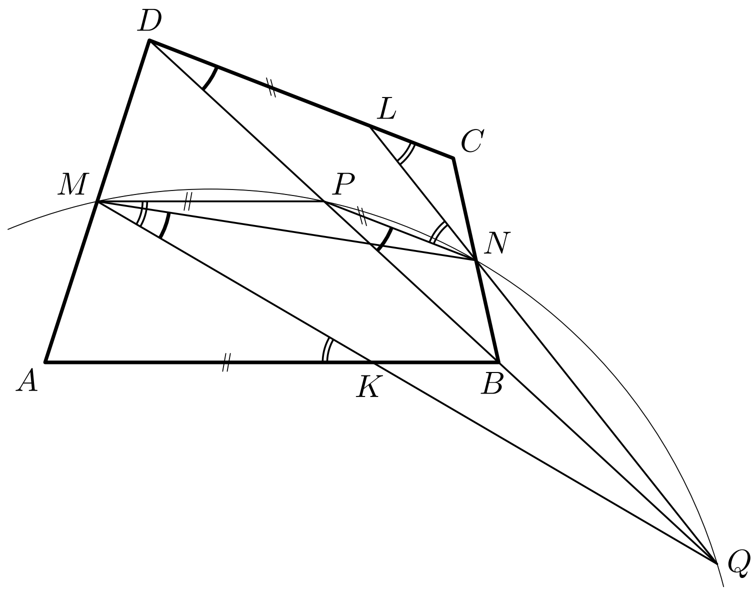
---

5. *V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ označme M, N postupne stredy strán AD, BC. Na stranách AB a CD sú postupne zvolené také body K a L, že $|\measuredangle MKA|=|\measuredangle NLC|$. Dokážte, že ak priamky BD, KM, LN prechádzajú jedným bodom, tak*

$$|\measuredangle KMN|=|\measuredangle BDC| \qquad \text{a} \qquad |\measuredangle LNM|=|\measuredangle ABD|.$$

(*Poľsko*)

Riešenie. Označme P stred uhlopriečky BD a Q priesečník priamok BD, KM a LN. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že bod B leží medzi bodmi Q a D (obr. 3). Keďže PM a PN sú stredné priečky trojuholníkov ABD a DCB, je $PM \parallel AB$ a $PN \parallel CD$. Takže $|\measuredangle PNL|=|\measuredangle NLC|=|\measuredangle MKA|=|\measuredangle KMP|$, čo znamená, že body P, M, Q, N ležia na jednej kružnici. Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou NQ tak



Obr. 3

vyplýva $|\measuredangle KMN|=|\measuredangle QMN|=|\measuredangle QPN|=|\measuredangle BDC|$. Podobne vychádza $|\measuredangle LNM|=$ $=180^\circ-|\measuredangle QNM|=180^\circ-|\measuredangle QPM|=|\measuredangle MPD|=|\measuredangle ABD|$.

6. *Nech a je ľubovoľné celé číslo. Dokážte, že existuje nekonečne veľa prvočísel p takých, že*

$$p \mid n^2 + 3 \qquad \text{a} \qquad p \mid m^3 - a$$

pre nejaké celé čísla n, m. (*Poľsko*)

Riešenie. Tvrdenie najskôr dokážeme pre $a = 0$. Vtedy má druhá podmienka tvar $p \mid m^3$, takže je splnená pre každé prvočíslo p voľbou $m = p$. Stačí teda dokázať, že medzi deliteľmi čísel $n^2 + 3$ ($n \in \mathbb{Z}$) je nekonečne veľa prvočísel. Pripusťme, že všetkých takých prvočísel je naopak konečne veľa, a označme ich p_1, p_2, …, p_r. Číslo $(3p_1p_2 \ldots p_r)^2 + 3 = 3(3p_1^2p_2^2 \ldots p_r^2 + 1)$ však má netriviálneho deliteľa $3p_1^2p_2^2 \ldots p_r^2 + 1$, ktorý nie je deliteľný žiadnym z prvočísel p_1, p_2, …, p_r, a to je spor.

Teraz tvrdenie dokážeme pre $a \neq 0$. Z rovností

$$(9a^2k^3)^2 + 3 = 3(27a^4k^6 + 1)$$

a

$$(9a^3k^4)^3 - a = a(3^6a^8k^{12} - 1) = a(27a^4k^6 - 1)(27a^4k^6 + 1)$$

vyplýva, že pre každé celé k je číslo $27a^4k^6 + 1$ spoločným deliteľom čísel $n^2 + 3$ a $m^3 - a$, pričom $n = 9a^2k^3$ a $m = 9a^3k^4$. Stačí teda dokázať, že pre ľubovoľné dané a medzi deliteľmi čísel $27a^4k^6 + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) existuje nekonečne veľa rôznych prvočísel.

Predpokladajme naopak, že takých prvočísel je len konečne veľa, a označme ich p_1, p_2, …, p_r. Pre $k = p_1p_2 \ldots p_r + 1$ je však zrejmé, že číslo $27a^4k^6 + 1 > 1$ nie je deliteľné žiadnym z prvočísel p_1, p_2, …, p_r. Má teda ďalšieho prvočiniteľa $p \notin \{p_i : 1 \leqq i \leqq r\}$. Dospeli sme tak k sporu, ktorý dokazuje tvrdenie úlohy.