60. ročník Matematickej olympiády
2010/2011 *Riešenia úloh MEMO*

I-1. *Na začiatku je na tabuli napísané číslo 44. Celé číslo a na tabuli môžeme nahradiť štyrmi navzájom rôznymi celými číslami a_1, a_2, a_3, a_4 takými, že ich aritmetický priemer $\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)$ je rovný číslu a. V každom kroku naraz nahradíme všetky čísla na tabuli vyššie opísaným spôsobom. Po 30 krokoch bude na tabuli $n=4^{30}$ celých čísel $b_1, b_2, \dots, b_n$. Dokážte, že*

$$\frac{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}{n} \geqq 2011.$$

(*Chorvátsko*)

Riešenie. Nahradením jedného z čísel na tabuli štvoricou opísanou v zadaní sa zväčší aritmetický priemer druhých mocnín čísel na tabuli. Dokážeme, že toto zväčšenie je dostatočne veľké. Začneme pomocným tvrdením.

Lema. Ak a_1, a_2, a_3, a_4 sú štyri navzájom rôzne celé čísla také, že ich aritmetický priemer $a=\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)$ je tiež celé číslo, tak platí

$$\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{4}-a^2 \geqq \frac{5}{2}.$$

Dôkaz. Ľavá strana dokazovanej nerovnosti sa dá prepísať takto:

$$\begin{aligned}\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{4}-a^2 &= \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2-2a(a_1+a_2+a_3+a_4)+4a^2}{4}\\ &= \frac{(a_1-a)^2+(a_2-a)^2+(a_3-a)^2+(a_4-a)^2}{4}.\end{aligned}$$

Čísla a_1-a, a_2-a, a_3-a, a_4-a sú navzájom rôzne celé čísla so súčtom 0. Ak žiadne z nich nie je nulové, bude súčet ich štvorcov aspoň $1^2+(-1)^2+2^2+(-2)^2=10$. Ak jedno z nich je nula, musí aspoň jedno z nich mať absolútnu hodnotu aspoň 3; v tomto prípade súčet štvorcov bude aspoň $3^2+1^2+(-1)^2=11$. V oboch prípadoch je platnosť tvrdenia lemy evidentná.

Vráťme sa k dokazovanému tvrdeniu. Označme S_k aritmetický priemer druhých mocnín čísel na tabuli po vykonaní k krokov. Keď použijeme dokázanú lemu pre štvorice čísel vzniknuté nahradením každého zo 4^k čísel, ktoré sú na tabuli po k krokoch, dostaneme, že $S_{k+1}-S_k \geqq 5/2$ pre každé $k \geqq 0$. Preto

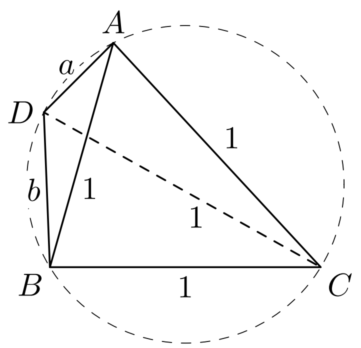
$$S_{30} \geqq S_0 + 30\cdot\frac{5}{2} = 44^2+75 = 2011.$$

I-2. *Dané je celé číslo $n \geqq 3$. Janko a Marienka hrajú nasledujúcu hru: Najskôr Janko označí strany pravidelného n-uholníka číslami $1, 2, \ldots, n$ v ľubovoľnom poradí, pričom každé číslo použije práve raz. Potom Marienka rozdelí uvedený n-uholník na trojuholníky pomocou $n-3$ uhlopriečok, ktoré sa vnútri n-uholníka nepretínajú. Všetky tieto uhlopriečky označíme číslom 1. Dovnútra každého trojuholníka napíšeme súčin čísel na jeho stranách. Nech S je súčet týchto $n-2$ súčinov. Určte, aká bude hodnota S, ak Marienka chce, aby bolo S čo najmenšie, Janko chce, aby bolo S čo najväčšie a obaja hrajú najlepšie ako sa dá.* (*Chorvátsko*)

Riešenie. Ukážeme, že $S = (n^2 + 3n - 6)/2$ pre všetky $n \geqq 3$. Pre $n = 3$ je to zjavne pravda, ďalej budeme uvažovať $n > 3$.

Pozrime sa na situáciu najprv z pohľadu Marienky. V každej triangulácii, ktorú vytvorí, bude presne $n-2$ trojuholníkov. Každý trojuholník z triangulácie má najviac dve strany na obvode pôvodného mnohouholníka a trojuholníky obsahujúce dve strany pôvodného mnohouholníka musia byť aspoň dva. Ukážeme, že pre Marienku je najlepšie zvoliť trianguláciu, v ktorej sú spomínané trojuholníky práve dva.

Nazvime trojuholník *zlý*, ak všetky jeho strany sú diagonálami pôvodného trojuholníka. Ukážeme, že Marienka chce zvoliť trianguláciu bez zlých trojuholníkov. Predpokladajme, že to tak nie je, t. j. existuje triangulácia optimálna pre Marienku, ktorá obsahuje zlý trojuholník (budeme takéto triangulácie volať *zlé*). Pre každú zlú trianguláciu T označme $d(T)$ dĺžku najkratšej možnej strany zlého trojuholníka v T. Zo všetkých zlých triangulácií s najmenším možným počtom zlých trojuholníkov vezmime trianguláciu T_0, pre ktorú je hodnota $d(T)$ minimálna.



Obr. 1

Nech ABC je zlý trojuholník v T_0 taký, že $|AB| = d(T_0)$. V T_0 máme tiež trojuholník ABD pre $D \neq C$. Strana AB je v trojuholníku ABC najkratšia, čiže uhol ACB je najmenší a teda ostrý. Body A, C, B, D ležia na kružnici v tomto poradí, preto uhol ADB je tupý a teda AD aj BD sú kratšie ako AB. Zmeňme trianguláciu T_0 na T_1 tak, že trojuholníky ABC a ABD nahradíme trojuholníkmi ACD a BCD (obr. 1). Ohodnotenia úsečiek AD a BD nech sú a a b. Zmenu hodnoty S vieme vyjadriť ako

$$S(T_1) - S(T_0) = a + b - ab - 1 = -(a-1)(b-1) \leqq 0.$$

Avšak triangulácia T_0 bola optimálna, preto aj T_1 musí byť optimálna. Pritom počet zlých trojuholníkov v T_0 bol najmenší možný, a teda aspoň jedna z úsečiek AD a BD je diagonálou. Keďže sú obe tieto úsečky kratšie ako AB, dostávame spor s voľbou T_0.

V triangulácii bez zlých trojuholníkov sú práve dva trojuholníky obsahujúce po dve susedné strany pôvodného mnohouholníka; všetky ostatné trojuholníky obsahujú presne jednu stranu pôvodného mnohouholníka. Vzhľadom na nerovnosť $ab > a+b$, platnú pre každú dvojicu prirodzených čísel a, b väčších ako 1, sa Marienka už ľahko rozhodne, ktoré dva trojuholníky budú obsahovať dve strany pôvodného mnohouholníka: jeden z nich bude obsahovať stranu ohodnotenú 1 a susednú stranu rôznu od 2, druhý zase naopak stranu ohodnotenú 2 a susednú stranu rôznu od 1. Týmto spôsobom Marienka vie zaručiť, že hodnota S nikdy nebude väčšia ako $3+4+\ldots+(n-2)+1\cdot(n-1)+$ $+\,2n = (n^2+3n-6)/2$.

Na druhej strane Janko vie donútiť Marienku k voľbe aspoň takejto hodnoty S tým, že vo svojom ťahu označí strany mnohouholníka postupne číslami

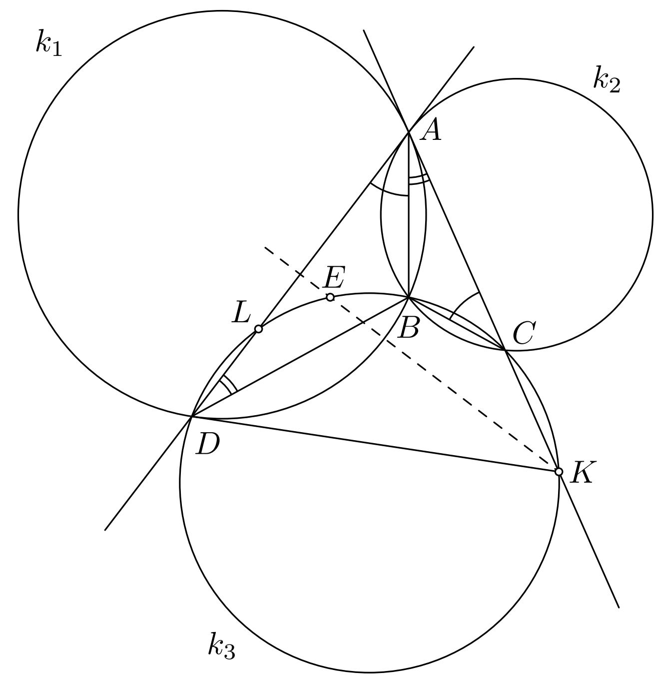
$$1,\ n-1,\ 4,\ n-3,\ 5,\ n-4,\ \ldots,\ n-2,\ 3,\ n,\ 2.$$

I-3. *V rovine sa kružnice k_1, k_2 so stredmi I_1, I_2 pretínajú v dvoch bodoch A a B. Predpokladajme, že uhol I_1AI_2 je tupý. Dotyčnica ku k_1 vedená bodom A pretína kružnicu k_2 znova v bode C a dotyčnica ku k_2 vedená bodom A pretína kružnicu k_1 znova v bode D. Nech k_3 je kružnica opísaná trojuholníku BCD. Označme E stred oblúka CD kružnice k_3 obsahujúceho bod B. Priamky AC a AD pretínajú kružnicu k_3 znova postupne v bodoch K a L. Dokážte, že priamky AE a KL sú na seba kolmé.*
(*Slovinsko*)

Riešenie. Priamka AD je dotyčnicou ku k_2, preto úsekový uhol DAB má takú istú veľkosť ako uhol BCA. Podobne $|\measuredangle ADB| = |\measuredangle BAC|$. Preto

$$|\measuredangle DBC| = 360^\circ - |\measuredangle DBA| - |\measuredangle CBA| = 2|\measuredangle DAB| + 2|\measuredangle CAB| = 2|\measuredangle DAC|.$$

Body D, L, E, B, C, K ležia na kružnici k_3. Aby sme sa vyhli diskusii viacerých



Obr. 2

prípadov možného poradia týchto bodov na kružnici, budeme používať orientované uhly. Symbolom $\widehat{XY}$ označíme veľkosť uhla XZY takého, že bod Z leží na kružnici k_3 a body X, Z, Y sú pozdĺž kružnice k_3 usporiadané proti smeru hodinových ručičiek. Keďže bod E je stredom oblúka CD, platí

$$|\angle AKE| = \frac{1}{2}\widehat{DC} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{CD}) = \frac{1}{2}(180^\circ - |\angle DBC|) = 90^\circ - |\angle DAC|.$$

Preto priamka KE je kolmá na AD (obr. 2). Podobne priamka LE je kolmá na AC, preto bod E je priesečníkom výšok trojuholníka KLA a teda priamka AE je kolmá na priamku KL, čo bolo treba dokázať.

Poznámka. Čiastočne iné riešenie tejto úlohy je možné založiť na pozorovaní, že bod E je stredom opísanej kružnice trojuholníka ACD. K riešeniu taktiež vedie použitie kružnicovej inverzie so stredom v bode A; ak obraz bodu X v takejto inverzii označíme X', bude štvoruholník $AD'B'C'$ rovnobežník a štvoruholník $AC'E'D'$ deltoid.

I-4. *Nech k a m sú kladné celé čísla, pričom $k > m$ a číslo $km(k^2 - m^2)$ je deliteľné číslom $k^3 - m^3$. Dokážte, že $(k - m)^3 > 3km$.* (*Poľsko*)

Riešenie. Označme d najväčšieho spoločného deliteľa čísel k a m. Pre vhodné celé čísla a a b platí $k = da$, $m = db$, pričom a a b sú nesúdeliteľné a $a > b$. Číslo

$$\frac{km(k^2 - m^2)}{k^3 - m^3} = \frac{d^4ab(a^2 - b^2)}{d^3(a^3 - b^3)} = \frac{dab(a + b)}{a^2 + ab + b^2}$$

je podľa predpokladu zo zadania celé, preto $a^2 + ab + b^2 \mid dab(a + b)$. Z nesúdeliteľnosti čísel a, b vyplýva, že $a^2 + ab + b^2$ je nesúdeliteľné s a, b aj $a + b$; prvé dve nesúdeliteľnosti sú evidentné, na dôkaz tretej môžeme použiť Euklidov algoritmus:

$$\operatorname{nsd}(a + b, a^2 + ab + b^2) = \operatorname{nsd}(a + b, a(a + b) + b^2) = \operatorname{nsd}(a + b, b^2) = 1.$$

Z toho dostávame $a^2 + ab + b^2 \mid d$. Preto $d \geqq a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab > 3ab$. Takže

$$(k - m)^3 = d^3(a - b)^3 \geqq d^3 > d^2 \cdot 3ab = 3km.$$

T-1. *Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že rovnosť*

$$y^2 f(x) + x^2 f(y) + xy = xyf(x + y) + x^2 + y^2$$

platí pre všetky dvojice $x, y \in \mathbb{R}$, pričom $\mathbb{R}$ je množina všetkých reálnych čísel.

(*Chorvátsko*)

Riešenie. Po dosadení $y = 0$ dostaneme $x^2 f(0) = x^2$ pre každé reálne číslo x, preto $f(0) = 1$.

Zaveďme novú funkciu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takú, že $g(x) = f(x) - 1$. Zadaná rovnica po prepísaní s g namiesto f prejde na tvar

$$y^2 g(x) + x^2 g(y) = xy\, g(x + y), \tag{1}$$

pričom vieme, že $g(0) = 0$.

Každá funkcia v tvare $g(x) = cx$ pre ľubovoľnú reálnu konštantu c je riešením našej rovnice. Označme $h(x) = g(x) - g(1)x$. Ukážeme, že $h(x) = 0$ pre každé reálne číslo x.

Funkcia h spĺňa pre každú dvojicu reálnych čísel x, y rovnosť

$$y^2 h(x) + x^2 h(y) = xy\, h(x+y); \tag{2}$$

navyše vieme, že $h(0) = h(1) = 0$. Po dosadení $x = y = 1$ do (2) dostaneme $h(2) = 0$, z dosadenia $x = -1$, $y = 1$ máme $h(-1) = 0$.

Predpokladajme, že existuje reálne číslo a také, že $h(a) \neq 0$ (zjavne $a \neq 0$). Dosadením $x = 1$, $y = a + 1$ do (2) dostaneme $h(a+1) = (a+1)h(a+2)$. Dosadením $x = 2$, $y = a$ do (2) dostaneme $2h(a) = ah(a+2)$. Z týchto dvoch rôznych vyjadrení hodnoty $h(a+2)$ dostávame

$$\frac{h(a+1)}{a+1} = \frac{2h(a)}{a}. \tag{3}$$

Pritom z dosadenia $x = 1$, $y = a$ do (2) vyplýva, že $h(a) = ah(a+1)$, čo spolu so vzťahom (3) dáva $a = -\frac{1}{2}$. Avšak dosadenie $x = y = -\frac{1}{2}$ do (2) nám po využití $h(-1) = 0$ prezradí, že $h(-\frac{1}{2}) = 0$, a to je spor s voľbou čísla a.

Jedinými riešeniami sú teda funkcie $f(x) = cx + 1$ pre ľubovoľné reálne číslo c; ich správnosť ľahko overíme skúškou.

Iné riešenie. Tak ako v prvom riešení zavedieme funkciu g a dokážeme, že $g(0) = 0$ a $g(-x) = -g(x)$. Po dosadení $y = 1$ a $y = -1$ do rovnice (1) dostaneme

$$g(x) + x^2 g(1) = x\, g(x+1), \tag{4}$$
$$g(x) + x^2 g(-1) = -x\, g(x-1). \tag{5}$$

Keď vzťah (5) prepíšeme s $x + 1$ miesto x, dostaneme spolu so vzťahom (4) sústavu dvoch rovníc s neznámymi $g(x+1)$, $g(x)$. Zo sústavy vyjadríme $g(x)$:

$$g(x)(x^2 + x + 1) = g(1)x(x^2 + x + 1).$$

Keďže číslo $x^2 + x + 1$ je vždy kladné, jedinou možnosťou je $g(x) = g(1)x$ a teda $f(x) = cx + 1$. Skúškou overíme, že takáto funkcia f vyhovuje pre každé reálne číslo c.

T-2. *Nech a, b, c sú kladné reálne čísla spĺňajúce rovnosť*

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 2.$$

Dokážte, že

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2} \geqq \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

(*Chorvátsko*)

Riešenie. Zaveďme substitúciu $a = 2x$, $b = 2y$, $c = 2z$. Chceme dokázať nerovnosť

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geqq \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}},$$

pričom platí rovnosť
$$\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+2y}+\frac{1}{1+2z}=1,$$
ktorá vyplýva zo zadanej podmienky po trojnásobnom využití vzťahu
$$\frac{2t}{1+2t}=1-\frac{1}{1+2t}.$$

Dokazovaná nerovnosť je symetrická, preto môžeme predpokladať, že $x \geqq y \geqq z$. Ľahko nahliadneme, že
$$\frac{x-1}{2x+1} \geqq \frac{y-1}{2y+1} \geqq \frac{z-1}{2z+1}. \tag{1}$$
Taktiež platí
$$\frac{2x+1}{\sqrt{x}} \geqq \frac{2y+1}{\sqrt{y}} \geqq \frac{2z+1}{\sqrt{z}}. \tag{2}$$
Ľahko to dokážeme z ekvivalentného tvaru týchto nerovností: $(x-y)(4xy-1) \geqq 0$ a $(y-z)(4yz-1) \geqq 0$. Keby bolo $4xy < 1$, bude
$$\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+2y}>1,$$
a to by bol spor s väzbou.

Vďaka vzťahom (1) a (2) môžeme použiť Čebyševovu nerovnosť[1]:
$$\sum_{\text{cykl.}}\frac{x-1}{\sqrt{x}}=\sum_{\text{cykl.}}\left(\frac{x-1}{2x+1}\cdot\frac{2x+1}{\sqrt{x}}\right)\geqq\frac{1}{3}\sum_{\text{cykl.}}\frac{x-1}{2x+1}\sum_{\text{cykl.}}\frac{2x+1}{\sqrt{x}}=0.$$

Iné riešenie. (Náznak.) Po substitúcii $x=1/(a+1)$, $y=1/(b+1)$, $z=1/(c+1)$ platí $x+y+z=1$ a pôvodné premenné vieme vyjadriť ako $a=(y+z)/x$, $b=(x+z)/y$, $c=(x+y)/z$. Chceme dokázať nerovnosť
$$\sqrt{\frac{x+y}{2z}}+\sqrt{\frac{y+z}{2x}}+\sqrt{\frac{z+x}{2y}}\geqq\sqrt{\frac{2x}{y+z}}+\sqrt{\frac{2y}{z+x}}+\sqrt{\frac{2z}{y+x}}.$$
Táto nerovnosť platí pre všetky trojice kladných reálnych čísel x, y, z: Spravíme substitúciu $p=x+y$, $q=y+z$, $r=z+x$. Čísla p, q, r sú potom dĺžkami strán trojuholníka a môžeme písať $p=2R\sin\alpha$, $q=2R\sin\beta$, $r=2R\sin\gamma$, pričom R je polomer opísanej kružnice a $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Použitím základných vzorcov pre prácu s goniometrickými funkciami vieme ukázať, že
$$\sqrt{\frac{x+y}{2z}}=\sqrt{\frac{p}{q+r-p}}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}}.$$

[1] Pod skráteným zápisom $\sum\limits_{\text{cykl.}} V(x)$ rozumieme „cyklický“ súčet $V(x)+V(y)+V(z)$.

Podobne sa dajú upraviť všetky členy na ľavej aj pravej strane dokazovanej nerovnosti; po ďalších ekvivalentných úpravách redukujeme úlohu na dôkaz nerovnosti

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2} \geqq \left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\right).$$

Keďže funkcia sínus je na intervale $(0,\pi)$ konkávna, podľa Jensenovej nerovnosti platí

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2} \leqq 3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6} = \frac{3}{2}.$$

Na dokončenie dôkazu si stačí uvedomiť, že podľa nerovnosti medzi aritmetickým a kvadratickým priemerom platí

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2} \geqq \frac{1}{3}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2.$$

T-3. *Pre celé číslo $n \geqq 3$ označme $\mathcal{M}$ množinu $\{(x,y);\ x,y \in \mathbb{Z}, 1 \leqq x \leqq n, 1 \leqq y \leqq n\}$ pozostávajúcu z bodov roviny. (Symbol $\mathbb{Z}$ označuje množinu celých čísel.) Aký je najväčší možný počet prvkov podmnožiny $S \subseteq \mathcal{M}$, ktorá neobsahuje žiadne tri body ležiace vo vrcholoch pravouhlého trojuholníka?* (*Maďarsko*)

Riešenie. Množina

$$S = (\{1\} \times \{2,\dots,n\}) \cup (\{2,\dots,n\} \times \{1\})$$

má $2n-2$ prvkov a neobsahuje žiadne tri body tvoriace vrcholy pravouhlého trojuholníka. Ukážeme, že každá vyhovujúca množina S má najviac $2n-2$ prvkov.

Vezmime vyhovujúcu množinu S. Označme S_x množinu tých bodov (x,y) z S, ktoré majú unikátnu x-ovú súradnicu, čiže v S nie je žiaden bod (x,y') pre $y' \neq y$. Podobne označme S_y množinu bodov z S s unikátnou y-ovou súradnicou.

Najprv sporom dokážeme, že $S = S_x \cup S_y$. Keby nejaký bod P patril do S, ale nepatril by ani do S_x, ani do S_y, tak k nemu vieme nájsť bod P_x s rovnakou x-ovou súradnicou aj bod P_y s rovnakou y-ovou súradnicou. Potom však body P, P_x, P_y tvoria pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole P.

Ak $|S_x| = n$, tak $S = S_x$, potom však množina S má n prvkov, a to je pre každé $n \geqq 3$ menej ako $2n-2$. Podobne vybavíme množiny, pre ktoré $|S_y| = n$. V každom inom prípade však $|S_x| \leqq n-1$ a $|S_y| \leqq n-1$, teda množina S má nanajvýš $2n-2$ prvkov.

T-4. *Nech $n \geqq 3$ je prirodzené číslo. Súťaže podobnej MEMO sa zúčastnilo $3n$ účastníkov, ktorí dokopy hovoria n rôznymi jazykmi. Každý účastník ovláda práve tri z týchto jazykov. Dokážte, že vieme vybrať aspoň $\lceil \frac{2}{9}n \rceil$ zo spomínaných n jazykov tak, aby žiadny účastník neovládal viac ako dva z nich. (Symbol $\lceil x \rceil$ označuje najmenšie celé číslo, ktoré nie je menšie ako x.)* (*Chorvátsko*)

Riešenie. Jazyky budeme voliť náhodne a ukážeme, že pravdepodobnosť priaznivej voľby je kladná. Z toho potom hneď vyplýva, že existuje požadovaná voľba jazykov.

Nech $p \in [0,1]$. Každý jazyk bude zvolený s pravdepodobnosťou p; voľby pre jednotlivé jazyky sú nezávislé. (Formálne, elementárnou udalosťou je n-tica $\omega = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, kde $a_i = 1$, ak i-ty jazyk bol zvolený, inak $a_i = 0$; pravdepodobnosť elementárnej udalosti ω je rovná $p^k(1-p)^{n-k}$, kde k je počet jednotiek v ω.)

Budeme skúmať dve náhodné premenné A a B, kde A označuje počet zvolených jazykov a B počet účastníkov, ktorých všetky tri jazyky boli zvolené. Vypočítame stredné hodnoty týchto dvoch premenných.

$$E(A) = \sum_{\text{jazyk } l} 1 \cdot P(\text{zvolili sme jazyk } l) = np$$

$$E(B) = \sum_{\text{študent } s} P(\text{všetky jazyky študenta } s \text{ sú zvolené}) = 3n \cdot p^3.$$

Ďalej využijeme nerovnosť

$$P(X \geqq E(X)) > 0,$$

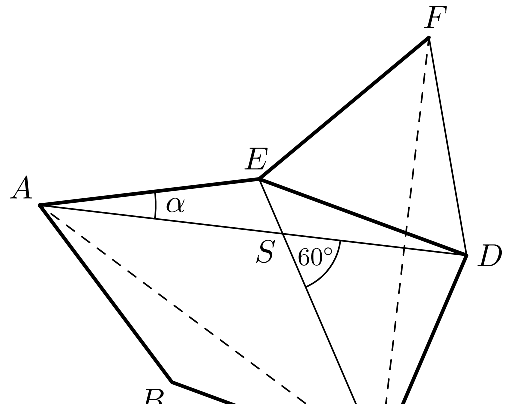
ktorá evidentne platí pre každú náhodnú premennú X. V našom prípade pre $X = A - B$ dostávame

$$P(A - B \geqq np - 3np^3) > 0.$$

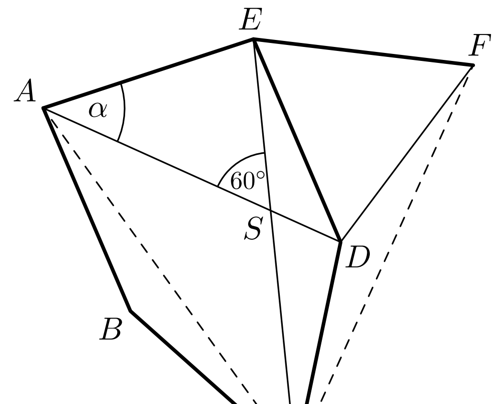
Z toho vyplýva, že existuje voľba jazykov (t. j. elementárna udalosť ω) taká, že $A(\omega) - B(\omega) \geqq np - 3np^3$. Pre túto voľbu jazykov vieme odstrániť spomedzi zvolených jazykov jeden jazyk za každého účastníka, pre ktorého boli zvolené všetky tri jazyky, ktorými hovorí, a stále ostane aspoň $A - B$ jazykov. Pre $p = \frac{1}{3}$ však $A - B \geqq \frac{2}{9}n$, a teda sme dokázali, čo sme potrebovali.

T-5. *Konvexný päťuholník $ABCDE$ má všetky strany rovnako dlhé. Uhlopriečky AD a EC sa pretínajú v bode S tak, že $|\angle ASE| = 60°$. Dokážte, že päťuholník $ABCDE$ má niektoré dve strany rovnobežné.* (*Michal Szabados*)

Riešenie. Označme α veľkosť uhla EAD. Takú istú veľkosť má aj uhol EDA, a zo zadanej veľkosti $|\angle ASE| = 60°$ ľahko dopočítame $|\angle AEC| = 120° - \alpha$ a $|\angle DEC| = 60° - \alpha$. Označme F obraz bodu A v osovej súmernosti podľa priamky CE. Uhol FED má veľkosť $(120° - \alpha) - (60° - \alpha) = 60°$, a keďže $|EF| = |EA| = |ED|$, je trojuholník DEF rovnostranný. Trojuholníky ABC a FDC sú teda zhodné podľa vety *sss*.



Obr. 3a



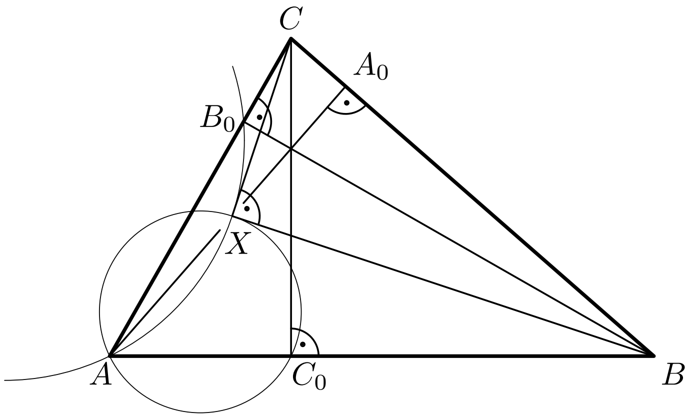
Obr. 3b

Ak sa bod D nachádza mimo trojuholníka ACF (obr. 3a), tak body B a D sú súmerné podľa priamky CE, čiže $|EB| = |ED|$ a štvoruholník $BCDE$ je kosoštvorec. Potom $BC \parallel DE$.

Ak bod D leží v trojuholníku ACF (obr. 3b), sú body C a F súmerné podľa osi AD, pretože uhly ADC aj ADF majú veľkosť $60° + \alpha$ (využili sme, že $|\measuredangle ECD| = |\measuredangle CED| = 60° - \alpha$). Potom však $|AF| = |AC|$ a trojuholníky ABC a AEF sú zhodné. Bod E musí ležať mimo trojuholníka ACF, inak by päťuholník $ABCDE$ nebol konvexný, čo je v rozpore so zadaním. Zo zhodnosti trojuholníkov ABC a AEF potom vyplýva, že body B a E sú súmerné podľa priamky AD. Preto $|DB| = |DE|$, čiže štvoruholník $ABDE$ je kosoštvorec a platí $AB \parallel DE$.

T-6. *Daný je ostrouhlý trojuholník ABC. Označme postupne B_0 a C_0 päty výšok z vrcholov B a C. Bod X leží vnútri trojuholníka ABC tak, že priamka BX sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku AXC_0 a priamka CX sa dotýka kružnice opísanej trojuholníku AXB_0. Dokážte, že priamky AX a BC sú na seba kolmé.* (Česká rep.)

Riešenie. Dotyk priamky s kružnicou vieme popísať pomocou mocnosti bodu ku kružnici. V našom prípade z mocnosti bodu B ku kružnici opísanej trojuholníku AXC_0 dostaneme $|BX|^2 = |BA| \cdot |BC_0|$. Podobne $|CX|^2 = |CA| \cdot |CB_0|$. Označme A_0 pätu



Obr. 4

výšky z vrcholu A. Štvoruholník ACA_0C_0 je tetivový, preto pre mocnosť bodu B k jemu opísanej kružnici platí $|BA| \cdot |BC_0| = |BA_0| \cdot |BC|$; podobne dostaneme $|CA| \cdot |CB_0| = |CA_0| \cdot |CB|$. Celkovo dostávame

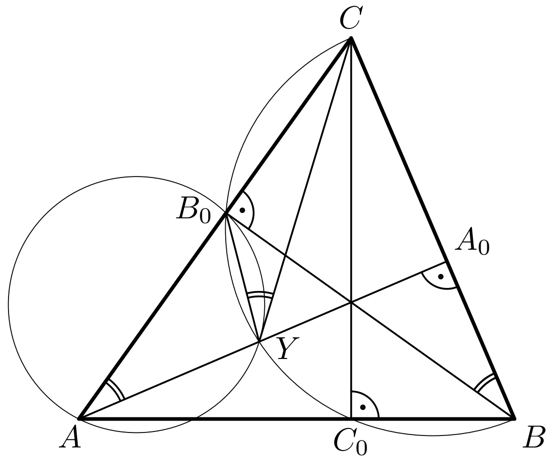
$$|BX|^2 + |CX|^2 = |BA| \cdot |BC_0| + |CA| \cdot |CB_0| = |BA_0| \cdot |BC| + |CA_0| \cdot |BC| = |BC|^2,$$

čiže uhol BXC je pravý (obr. 4). Okrem toho platí $|BX|^2 = |BA_0| \cdot |BC|$ a preto z Euklidovej vety o odvesne v pravouhlom trojuholníku BXC vyplýva, že bod A_0 je pätou výšky z vrcholu X na preponu BC. Inak povedané, priamky AA_0 a XA_0 sú totožné, preto je priamka AX kolmá na priamku BC.

Iné riešenie. Z mocnosti bodu ku kružnici dostávame

$$|BX|^2 = |BA| \cdot |BC_0|, \qquad |CX|^2 = |CA| \cdot |CB_0|.$$

Pre daný trojuholník ABC tieto rovnosti jednoznačne určujú vzdialenosti bodu X od bodov B a C. Do úvahy teda prichádzajú len dva možné body X, avšak jeden z nich vždy leží mimo trojuholníka ABC. Preto je bod X pre daný trojuholník ABC jediný. Ukážeme, že tento bod X je totožný s bodom Y, ktorý je priesečníkom Tálesovej kružnice nad priemerom BC a výšky trojuholníka ABC z vrcholu A. To zjavne bude stačiť na dôkaz zadaného tvrdenia.



Obr. 5

Štvoruholník BCB_0Y je tetivový, preto $|\measuredangle CBB_0| = |\measuredangle CYB_0|$. Potom $|\measuredangle CAY| = 90^\circ - |\measuredangle ACB| = |\measuredangle CBB_0| = |\measuredangle CYB_0|$, a podľa vety o úsekovom uhle sa priamka CY dotýka kružnice opísanej trojuholníku AYB_0 (obr. 5). Analogicky vieme ukázať, že sa priamka BY dotýka kružnice opísanej trojuholníku AYC_0, a teda $X = Y$.

T-7. *Nech A a B sú disjunktné neprázdne množiny také, že $A \cup B = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Dokážte, že existujú prvky $a \in A$ a $b \in B$ také, že číslo $a^3 + ab^2 + b^3$ je deliteľné 11.*
(*Poľsko*)

Riešenie. Stačí ukázať, že existujú $a \in A$ a $b \in B$ také, že $a \equiv 2b \pmod{11}$, pretože pre také a, b platí

$$a^3 + ab^2 + b^3 \equiv 8b^3 + 2b^3 + b^3 \equiv 0 \pmod{11}.$$

Predpokladajme, že k nejakému $b \in B$ množina A neobsahuje žiadne vyhovujúce a. Potom však číslo so zvyškom $2b$ po delení 11 musí byť v množine B (využívame, že ak b nie je deliteľné 11, ani jeho dvojnásobok nebude). Ak ani k $2b$ nevieme nájsť vyhovujúce $a \in A$, tak aj číslo so zvyškom $4b$ je v B. A tak ďalej, postupne dôjdeme k záveru, že čísla so zvyškami b, $2b$, $4b$, …, 2^9b sú všetky v B. Tieto čísla však dávajú navzájom rôzne zvyšky po delení 11 a preto množina B obsahuje 10 čísel. Potom však množina A je prázdna, a to je spor s predpokladom zo zadania.

T-8. *Kladné celé číslo n nazveme úžasným, ak existujú kladné celé čísla a, b, c spĺňajúce rovnosť*

$$n = \operatorname{nsd}(b, c) \cdot \operatorname{nsd}(a, bc) + \operatorname{nsd}(c, a) \cdot \operatorname{nsd}(b, ca) + \operatorname{nsd}(a, b) \cdot \operatorname{nsd}(c, ab).$$

Dokážte, že existuje 2011 po sebe idúcich kladných celých čísel, ktoré sú úžasné.
(*Litva*)

Riešenie. Zvoľme najprv čísla x_1, x_2, ..., x_{2011} tak, aby čísla

$$y_1 = x_1^2(x_1+2), \quad y_2 = x_2^2(x_2+2), \quad \dots, \quad y_{2011} = x_{2011}^2(x_{2011}+2)$$

boli navzájom nesúdeliteľné. Môžeme zvoliť napríklad $x_1 = 1$ a $x_i = y_1 y_2 \dots y_{i-1} - 1$ postupne pre každé $i \in \{2, 3, \dots, 2011\}$. Takto zvolené číslo x_i zabezpečí, že y_i je nesúdeliteľné s y_1, y_2, ..., y_{i-1}.

Podstata našej voľby čísel x_i spočíva v tom, že každé číslo deliteľné číslom v tvare $x^2(x+2)$ je úžasné. Naozaj, ak $n = x^2(x+2)m$, tak $n = \text{nsd}(b,c) \cdot \text{nsd}(a,bc) + \text{nsd}(c,a) \cdot \text{nsd}(b,ca) + \text{nsd}(a,b) \cdot \text{nsd}(c,ab)$ pre $a = mx^2$, $b = mx$, $c = x$.

Keďže čísla y_1, y_2, ..., y_{2011} sú navzájom nesúdeliteľné, podľa čínskej zvyškovej vety existuje kladné celé číslo k také, že

$$k \equiv -i \pmod{y_i} \qquad \text{pre každé} \quad i \in \{1, 2, \dots, 2011\}.$$

Preto číslo $k + i$ je deliteľné číslom y_i pre každé $i \in \{1, 2, \dots, 2011\}$. Takže čísla $k+1$, $k+2$, ..., $k+2011$ sú všetky úžasné a tvoria hľadaných 2011 po sebe idúcich úžasných čísel.