

2012/2013
62. ročník MO

Zadania úloh krajského kola kategórie A

(Súťaž sa konala v utorok 15. januára 2013.)

1. Daných je 21 rôznych celých čísel takých, že súčet ľubovoľných jedenástich z nich je väčší ako súčet desiatich zvyšných čísel.

a) Dokážte, že každé z daných čísel je väčšie ako 100.

b) Určte všetky také skupiny 21 rôznych celých čísel, ktoré obsahujú číslo 101.
(Jaromír Šimša)

2. Nech A, B sú množiny celých kladných čísel také, že súčet ľubovoľných dvoch rôznych čísel z A patrí do B a podiel ľubovoľných dvoch rôznych čísel z B (väčšie delené menším) patrí do A . Určte najväčší možný počet prvkov množiny $A \cup B$.
(Martin Panák)

3. V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB a odvesnami dĺžok $|AC| = 4$ a $|BC| = 3$ ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že k_1 sa dotýka strán AB a AC a k_2 sa dotýka strán AB a BC . Určte polomery r_1 a r_2 , ak platí $4r_1 = 9r_2$.
(Pavel Novotný)

4. Dokážte, že kladné čísla a, b, c sú dĺžkami strán trojuholníka práve vtedy, keď sústava rovníc

$$a(yz + x) = b(xz + y) = c(xy + z), \quad x + y + z = 1$$

s neznámymi x, y, z má riešenie v obore kladných reálnych čísel.
(Tomáš Jurík)