62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh krajského kola kategórie A*

---

1. *Daných je 21 rôznych celých čísel takých, že súčet ľubovoľných jedenástich z nich je väčší ako súčet desiatich zvyšných čísel.*

a) Dokážte, že každé z daných čísel je väčšie ako 100.

b) Určte všetky také skupiny 21 rôznych celých čísel, ktoré obsahujú číslo 101.

(Jaromír Šimša)

Riešenie. a) Označme dané čísla $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{21}$. Keďže sú tieto čísla celé, platí pre každé $i \in \{1, 2, \cdots, 20\}$ nerovnosť $a_{i+1} - a_i \geqq 1$, a preto $a_{i+10} - a_i \geqq 10$ pre každé $i \in \{2, 3, \ldots, 11\}$. Podmienka zo zadania je splnená práve vtedy, keď súčet najmenších jedenástich čísel je väčší ako súčet desiatich najväčších, teda

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} > a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{21}. \tag{1}$$

Odtiaľ

$$a_1 > (a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \cdots + (a_{21} - a_{11}) \geqq 10 \cdot 10 = 100;$$

najmenšie z daných čísel je väčšie ako 100, takže väčšie ako 100 sú všetky dané čísla.

b) Dokázali sme nerovnosť $a_1 \geqq 101$. Všetky ostatné čísla sú preto väčšie ako 101. Ak teda skupina daných čísel obsahuje číslo 101, musí platiť $a_1 = 101$. Z ostrej nerovnosti (1) tak vyplýva neostrá nerovnosť

$$(a_{12} - a_2) + (a_{13} - a_3) + \cdots + (a_{21} - a_{11}) \leqq a_1 - 1 = 100,$$

a pretože $a_{i+10} - a_i \geqq 10$, musí byť splnená rovnosť $a_{i+10} - a_i = 10$ pre každé $i \in \in \{2, 3, \ldots, 11\}$. To nastane práve vtedy, keď sú $a_2, a_3, \ldots, a_{21}$ po sebe idúce celé čísla.

Hľadané skupiny teda okrem čísla 101 obsahujú ešte ľubovoľných 20 po sebe idúcich celých čísel väčších ako 101. Súčet jedenástich najmenších čísel z takej skupiny je o 1 väčší ako súčet desiatich najväčších.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, po 3 bodoch za časti a) aj b). V časti a) dajte 1 bod za vstupnú úvahu, že stačí porovnávať súčet 11 najmenších čísel so súčtom 10 najväčších, 1 bod za nerovnosti $a_{i+10} - a_i \geqq 10$, 1 bod potom za dokončenie dôkazu $a_1 > 100$.

V časti b) dajte 2 body za dôkaz rovností $a_{i+10} - a_i = 10$ a 1 bod za popis všetkých vyhovujúcich skupín čísel. (Ak nechýba v riešení a) vstupná úvaha, tolerujte v riešení b) absenciu záverečného konštatovania, že nájdené skupiny majú naozaj požadovanú vlastnosť.) Len za uhádnutie konkrétnych vyhovujúcich skupín (napríklad skupiny čísel od 101 do 121) žiadny bod nedávajte, ak nie sú uhádnuté všetky – v tom prípade dajte 1 bod.

---

2. *Nech A, B sú množiny celých kladných čísel také, že súčet ľubovoľných dvoch rôznych čísel z A patrí do B a podiel ľubovoľných dvoch rôznych čísel z B (väčšie delené menším) patrí do A. Určte najväčší možný počet prvkov množiny $A \cup B$.* (Martin Panák)

Riešenie. Najskôr dokážeme, že v množine A môžu byť najviac dve čísla. Pripusťme, že A obsahuje tri čísla $a < b < c$. Potom do B patria čísla $a + b < a + c < b + c$, a teda do A musí patriť číslo

$$\frac{b+c}{a+c} = 1 + \frac{b-a}{a+c};$$

to ale nie je celé, lebo $0 < b - a < a + c$.

Keby množina B obsahovala štyri čísla $k < l < m < n$, patrili by do A tri rôzne čísla n/k, n/l, n/m. Množina B má teda nanajvýš tri prvky a $A \cup B$ nemôže mať viac ako 5 prvkov.

Tento počet dosiahneme práve vtedy, keď $A = \{a, b\}$, $B = \{k, l, m\}$, pričom $a < b$ a $l/k = m/l = a$, $m/k = b$. Potom $b = a^2$ ($a \geqq 2$) a jedným z prvkov množiny B je $a + a^2$; ďalšími dvoma sú potom buď $a^2 + a^3$ a $a^3 + a^4$ alebo $1 + a$ a $a^2 + a^3$. Päť prvkov tak majú dokopy napríklad množiny $A = \{2, 4\}$, $B = \{3, 6, 12\}$.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Tri body dajte za dôkaz nerovnosti $|A| \leqq 2$, jeden bod za dôkaz nerovnosti $|B| \leqq |A| + 1$ a dva body za nájdenie (stačí jedného) príkladu množín A a B, pre ktoré $|A \cup B| = 5$.

---

3. *V pravouhlom trojuholníku ABC s preponou AB a odvesnami dĺžok $|AC| = 4$ a $|BC| = 3$ ležia navzájom sa dotýkajúce kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že k_1 sa dotýka strán AB a AC a k_2 sa dotýka strán AB a BC. Určte polomery r_1 a r_2, ak platí $4r_1 = 9r_2$.* (*Pavel Novotný*)

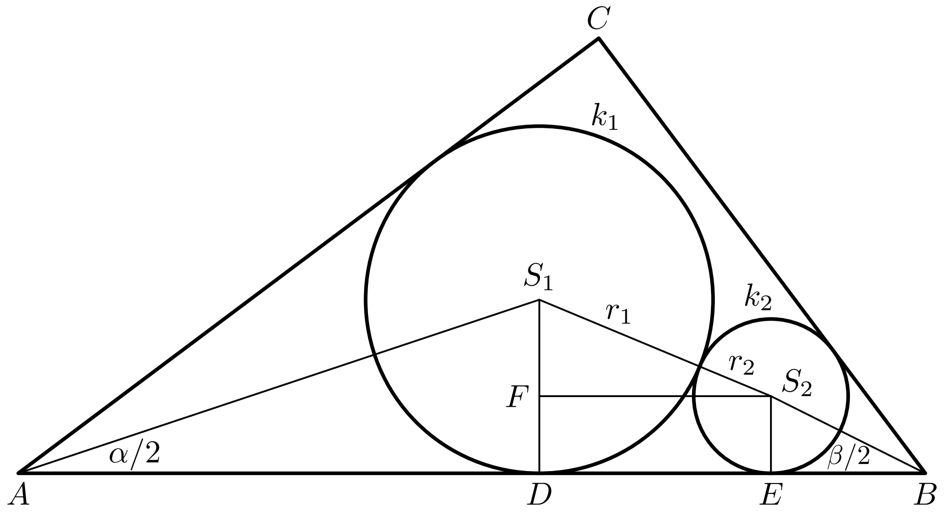
Riešenie. Prepona AB má podľa Pytagorovej vety dĺžku $|AB| = 5$. Pri zvyčajnom označení veľkostí strán a uhlov ďalej platí $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$,

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = 3,$$
$$\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}} = 2.$$

Keďže podľa zadania ležia obe kružnice k_1, k_2 celé v trojuholníku ABC, musia mať vonkajší dotyk – keby mali vnútorný dotyk (v bode prepony), bola by väčšia kružnica preťatá odvesnou dotýkajúcou sa menšej kružnice. Označme D a E dotykové body kružníc k_1 a k_2 so stranou AB a F kolmý priemet bodu S_2 na úsečku S_1D (obr. 1, podľa predpokladu je $r_1 > r_2$). Podľa Pytagorovej vety pre trojuholník FS_2S_1 platí

$$(r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + |DE|^2,$$

odtiaľ $|DE| = 2 \cdot \sqrt{r_1 r_2}$.



Obr. 1

Z rovnosti $|AB| = |AD| + |DE| + |EB|$ máme

$$c = r_1 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2 \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = 3r_1 + 2\sqrt{r_1 r_2} + 2r_2,$$

a keďže $r_1 = \frac{9}{4} r_2$, dostávame

$$\frac{27}{4} r_2 + 3r_2 + 2r_2 = 5,$$

a teda

$$r_2 = \frac{20}{47} \quad \text{a} \quad r_1 = \frac{45}{47}.$$

Kružnica vpísaná trojuholníku ABC má polomer $\varrho = ab/(a+b+c) = 1$. Keďže $r_1 < \varrho$, $r_2 < \varrho$, ležia obe kružnice v trojuholníku ABC.

Inú možnosť, ako vypočítať hodnotu $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha$, poskytuje pravouhlý trojuholník ATS, kde S je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC a T bod dotyku tejto kružnice so stranou AB. Platí

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \frac{|AT|}{|ST|} = \frac{b+c-a}{2\varrho} = 3;$$

podobne

$$\operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{a+c-b}{2\varrho} = 2.$$

Ešte iná možnosť: V pravouhlom trojuholníku XCB s odvesnami dĺžok $|XC| = c+b$, $|CB| = a$ má uhol BXC veľkosť $\frac{1}{2}\alpha$ (pri umiestnení bodu X na polpriamku CA totiž vznikne rovnoramenný trojuholník XBA), a preto

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \frac{c+b}{a} \quad \text{a podobne} \quad \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{c+a}{b}.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Dajte jeden bod za vyjadrenie $|DE| = 2 \cdot \sqrt{r_1 r_2}$, jeden bod za rovnosti $|AD| = r_1 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha$, $|BE| = r_2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta$, jeden bod za výpočet hodnôt $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha$ a $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta$, jeden bod za zostavenie rovnosti $c = r_1 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha + 2\sqrt{r_1 r_2} + r_2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta$, jeden bod za výpočet polomerov r_1, r_2 a jeden bod za overenie, že kružnice s týmito polomermi ležia v trojuholníku ABC. Úvodné konštatovanie o vonkajšom dotyku skúmaných kružníc môže v inak úplnom riešení chýbať.

---

4. *Dokážte, že kladné čísla a, b, c sú dĺžkami strán trojuholníka práve vtedy, keď sústava rovníc*

$$a(yz + x) = b(xz + y) = c(xy + z), \quad x + y + z = 1$$

s neznámymi x, y, z má riešenie v obore kladných reálnych čísel. (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Nech a, b, c sú kladné čísla. Hľadáme riešenie sústavy rovníc v množine kladných čísel. Vzhľadom na podmienku $x+y+z = 1$ musia byť čísla x, y, z v intervale $(0, 1)$. Dosadením $z = 1 - x - y$ do zvyšných rovníc dostaneme

$$a(y - xy - y^2 + x) = c(xy + 1 - x - y), \quad b(x - x^2 - xy + y) = c(xy + 1 - x - y),$$

po úprave

$$ay(1-y)+ax(1-y)=c(1-x)(1-y), \quad bx(1-x)+by(1-x)=c(1-x)(1-y),$$

a keďže $x<1$, $y<1$, máme

$$ay+ax=c-cx, \quad bx+by=c-cy.$$

Odtiaľ už ľahko vyjadríme

$$x=\frac{b+c-a}{a+b+c}, \quad y=\frac{c+a-b}{a+b+c}, \quad z=\frac{a+b-c}{a+b+c}. \tag{1}$$

Riešenie v množine kladných čísel teda existuje práve vtedy, keď platí $b+c>a$, $c+a>b$, $a+b>c$, čo sú známe trojuholníkové nerovnosti.

Iné riešenie. Uvedieme ešte jeden spôsob odvodenia vzťahov (1). Vďaka podmienke $x+y+z=1$ možno zrejme prepísať prvú časť uvažovanej sústavy rovníc na tvar

$$a(1-y)(1-z)=b(1-z)(1-x)=c(1-x)(1-y), \tag{2}$$

odkiaľ po vydelení výrazom $(1-x)(1-y)(1-z)$ (rôznym od nuly, dokonca ako vieme kladným) dostaneme ekvivalentné rovnice

$$\frac{a}{1-x}=\frac{b}{1-y}=\frac{c}{1-z}.$$

Ak označíme s spoločnú (kladnú) hodnotu posledných troch zlomkov, ľahko získame vyjadrenia

$$x=1-\frac{a}{s}, \quad y=1-\frac{b}{s}, \quad z=1-\frac{c}{s}, \tag{3}$$

ktoré po dosadení do rovnice $x+y+z=1$ vedú k určeniu hodnoty

$$s=\frac{a+b+c}{2}.$$

Pre také s potom už z vyjadrenia (3) dostaneme želané vzťahy (1), a tým aj dôkaz tvrdenia úlohy.

Dodajme, že vďaka prepisu (2) by bolo teraz možné urobiť skúšku priamym dosadením, avšak ani teraz to nie je – vzhľadom na platné vyjadrenia (3) – nutné.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 5 bodov za korektné odvodenie vzťahov (1) a 1 bod za súvislosť vzťahov (1) s trojuholníkovými nerovnosťami. Pri odvodení vzťahov (1) eliminačným postupom udeľte 1 bod za prechod na sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych (napr. x a y elimináciou $z=1-x-y$), 3 body za linearizáciu tejto sústavy krátením činiteľmi $1-x$ a $1-y$ (ak chýba vysvetlenie, prečo to sú nenulové hodnoty, strhnite 1 bod) a napokon 1 bod za vyriešenie lineárnej sústavy pre neznáme x, y a dopočítanie eliminovaného z (možno akceptovať aj prehlásenie, že vzorec pre z musí mať vzhľadom na symetriu tvar analogického zlomku).

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov. Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie prideľuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala so schémami uvedenými v tomto letáku.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Pavel Novotný, Peter Novotný
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012