62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013

Riešenia úloh domáceho kola kategórie B

1. *Určte všetky trojice (a, b, c) prirodzených čísel, pre ktoré platí*

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

(*Jaroslav Švrček*)

Riešenie. Danú rovnicu môžeme prepísať ako $2^a + 2^{2b} = 2^{3c}$. Aby sme mohli výraz na ľavej strane vydeliť mocninou dvojky, pomôžeme si označením $m = \min(a, 2b)$, $M = \max(a, 2b)$, $0 < m \leqq M$, takže

$$2^a + 2^{2b} = 2^m(2^{M-m} + 1).$$

Číslo $2^{M-m} + 1$ v zátvorke je pre $M > m$ zrejme nepárne číslo väčšie ako 1, takže to nemôže byť deliteľ mocniny 2^{3c}, ktorá je na pravej strane danej rovnice. Nutne teda musí byť $M = m$, odkiaľ vyplýva $a = 2b$ a porovnaním oboch strán upravenej rovnice aj $2b + 1 = 3c$. Keďže $2b + 1$ je nepárne číslo, musí byť číslo c tiež nepárne, existuje teda prirodzené číslo n, pre ktoré platí $c = 2n - 1$. Z rovnice $2b + 1 = 3c$ dopočítame $b = 3n - 2$ a $a = 2b = 6n - 4$.

Pre ľubovoľné prirodzené číslo n je trojica $(a, b, c) = (6n-4, 3n-2, 2n-1)$ riešením danej rovnice, ako môžeme overiť skúškou, ktorá pri tomto postupe nie je nutná.

Poznámka. Zo zápisu $2^a + 2^{2b} = 2^{3c}$ a z jednoznačnosti zápisu čísla v dvojkovej sústave okamžite vyplýva, že musí byť $a = 2b$, a teda $3c = a + 1$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Určte všetky dvojice (a, b) prirodzených čísel, pre ktoré platí $2^a - 16^b = 0$ [$(a, b) = (4b, b)$, pričom b je ľubovoľné prirodzené číslo.]

N2. Určte všetky štvorice (a, b, c, d) celých nezáporných čísel spĺňajúcich rovnicu

$$2^a 3^b 4^c = 16^d.$$

[$(a, b, c, d) = (4d - 2c, 0, c, d)$, pričom c, d sú ľubovoľné celé nezáporné čísla, pre ktoré platí $c \leqq 2d$.]

N3. V obore prirodzených čísel vyriešte rovnicu

$$2^a + 2^b = 2^c.$$

[$(a, b, c) = (a, a, a + 1)$, pričom a je ľubovoľné prirodzené číslo.]

N4. V obore prirodzených čísel vyriešte rovnicu

$$2^a + 2^b + 2^c = 2^d.$$

[$\{a, b, c\} = \{n, n, n + 1\}$, $d = n + 2$, pričom n je ľubovoľné prirodzené číslo.]

D1. Dokážte, že rovnica $2^x + 2^{x+3} = y^2$ má nekonečne veľa riešení v obore prirodzených čísel. [Rovnici $2^x(1 + 2^3) = y^2$ zrejme vyhovujú čísla $x = 2k$, $y = 3 \cdot 2^k$ pre ľubovoľné prirodzené číslo k.]

D2. Určte všetky dvojice celých kladných čísel m a n, pre ktoré platí $37 + 27^m = n^3$. [59–B–S–1]

2. *V obore reálnych čísel riešte rovnicu*

$$x^3 + (3\sqrt{2} - 2)x^2 - (1 + \sqrt{2})x - 14(\sqrt{2} - 1) = 0,$$

ak viete, že má aspoň jeden celočíselný koreň. Prípadné iracionálne korene zapíšte v jednoduchom tvare bez odmocnín z iracionálnych čísel. (Jaromír Šimša)

Riešenie. Danú rovnicu prepíšme na tvar

$$\sqrt{2}\,(3x^2 - x - 14) + (x^3 - 2x^2 - x + 14) = 0. \tag{1}$$

Z toho vyplýva, že každý celočíselný koreň danej rovnice musí byť koreňom rovnice

$$3x^2 - x - 14 = 0,$$

inak by sa iracionálne číslo $\sqrt{2}$ dalo z rovnice (1) vyjadriť ako podiel dvoch celých čísel. Táto kvadratická rovnica má korene -2 a $\frac{7}{3}$, z ktorých iba ten prvý je koreňom aj pôvodnej rovnice, ako sa ľahko presvedčíme dosadením oboch čísel do upravenej rovnice (1).

Našli sme teda koreň $x_1 = -2$ danej kubickej rovnice. Jej zvyšné korene sú korene kvadratickej rovnice, ktorú dostaneme, keď pôvodnú rovnicu vydelíme koreňovým činiteľom $x + 2$. Dostaneme tak

$$\big(x^3 + \big(3\sqrt{2} - 2\big)x^2 - \big(1 + \sqrt{2}\big)x - 14\big(\sqrt{2} - 1\big)\big) : (x + 2) = x^2 + \big(3\sqrt{2} - 4\big)x - 7\big(\sqrt{2} - 1\big) = 0.$$

Diskriminant D nájdenej kvadratickej rovnice je kladné iracionálne číslo

$$D = \big(3\sqrt{2} - 4\big)^2 + 28\big(\sqrt{2} - 1\big) = 6 + 4\sqrt{2}.$$

Aby sme sa vyhli v zápise zvyšných koreňov odmocninám iracionálnych čísel, hľadajme hodnotu $\sqrt{D}$ v tvare

$$\sqrt{D} = \sqrt{6 + 4\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$$

s racionálnymi koeficientmi a, b. Tie možno ľahko uhádnuť, lebo po umocnení na druhú dostávame

$$6 + 4\sqrt{2} = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2},$$

odkiaľ $a^2 + 2b^2 = 6$ a $2ab = 4$, takže je zrejmé, že vyhovujú hodnoty $a = 2$ a $b = 1$. (Namiesto hádania môžeme po dosadení $b = 2/a$ riešiť pre neznámu a^2 rovnicu $a^2 + 2 \cdot \cdot (2/a)^2 = 6$, z ktorej vychádza $a^2 = 2$ alebo $a^2 = 4$.)

Takže $\sqrt{D} = 2 + \sqrt{2}$ a zvyšnými koreňmi $x_{2,3}$ danej rovnice sú čísla

$$x_2 = \frac{4 - 3\sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})}{2} = 3 - \sqrt{2} \quad \text{a} \quad x_3 = \frac{4 - 3\sqrt{2} - (2 + \sqrt{2})}{2} = 1 - 2\sqrt{2}.$$

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Dokážte, že mnohočlen $x^4 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x^3 + (\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6})x^2 + 5x - \sqrt{6}$ je deliteľný mnohočlenom $x^2 - \sqrt{3}\,x + \sqrt{2}$, a nájdite podiel týchto dvoch mnohočlenov. [$x^2 + \sqrt{2}\,x - \sqrt{3}$]

N2. Vyjadrite čísla $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$, $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$, $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$, $\sqrt{30-12\sqrt{6}}$ v jednoduchom tvare, t. j. bez odmocnín z iracionálnych čísel. [$3-\sqrt{2}$, $2-\sqrt{3}$, $1+\sqrt{5}$, $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$]

N3. Nájdite všetky dvojice (p, q) reálnych čísel také, že mnohočlen x^2+px+q je deliteľom mnohočlena x^4+px^2+q. [56–B–I–5]

D1. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b také, že $a>\sqrt{b}$ platí

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{2\Big(a \pm \sqrt{a^2-b}\Big)},$$

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

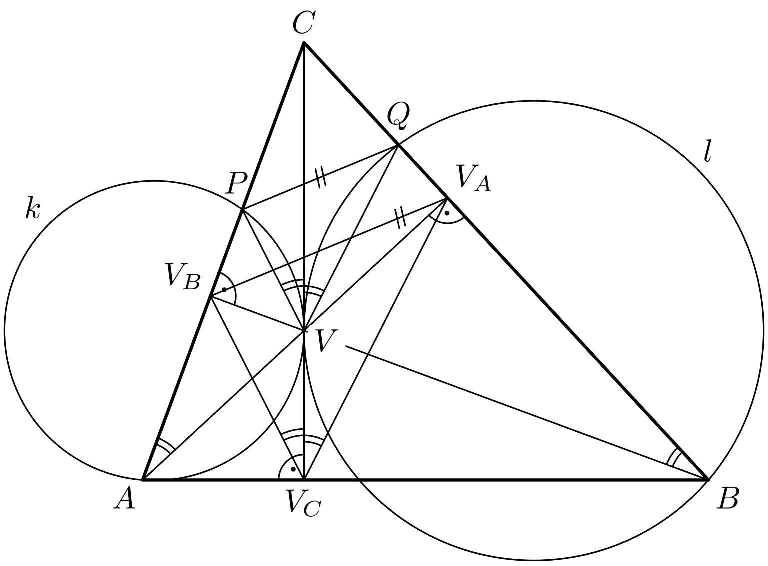
(sú to tzv. *surdické výrazy*).

D2. Nájdite všetky kvadratické trojčleny ax^2+bx+c také, že ak ľubovoľný z koeficientov a, b, c zväčšíme o 1, dostaneme nový kvadratický trojčlen, ktorý bude mať dvojnásobný koreň. [53–B–II–2]

---

3. *Nech V je priesečník výšok ostrouhlého trojuholníka ABC. Priamka CV je spoločnou dotyčnicou kružníc k a l, ktoré sa zvonka dotýkajú v bode V a pritom každá z nich prechádza jedným z vrcholov A a B. Ich priesečníky s vnútrami strán AC a BC označme P a Q. Dokážte, že polpriamka VC je osou uhla PVQ a že body A, B, P, Q ležia na jednej kružnici.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Označme veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC zvyčajným spôsobom a V_A, V_B, V_C päty jeho výšok postupne z vrcholov A, B, C (obr. 1).



Obr. 1

Trojuholník AV_AC je pravouhlý a platí $|\measuredangle VAC| = |\measuredangle V_AAC| = 90° - \gamma$. Podobne platí aj $|\measuredangle VBC| = |\measuredangle V_BBC| = 90° - \gamma$. Z rovnosti úsekového a obvodového uhla pre tetivu PV kružnice k vychádza $|\measuredangle CVP| = |\measuredangle VAC| = 90° - \gamma$. A obdobne pre tetivu QV kružnice l máme $|\measuredangle CVQ| = |\measuredangle VBC| = 90° - \gamma$. Polpriamka VC je teda osou uhla PVQ, čo sme chceli dokázať.

Druhú časť tvrdenia môžeme dokázať nasledujúcim spôsobom. Podľa Tálesovej vety ležia body V_A a V_C na Tálesovej kružnici nad priemerom AC. Z rovnosti obvodových uhlov nad tetivou V_AC tejto kružnice vyplýva $|\measuredangle V_AAC| = |\measuredangle V_AV_CC| = 90° - \gamma$. Úsečky V_AV_C a QV sú teda rovnobežné, pretože zvierajú s priamkou CV_C rovnaký uhol. Podobne zistíme, že aj úsečky V_BV_C a PV sú rovnobežné. Odtiaľ vidíme, že trojuholník $V_AV_BV_C$ je obrazom trojuholníka QPV v rovnoľahlosti so stredom v bode C, ktorá zobrazuje bod V_C na bod V. Preto sú úsečky V_AV_B a QP rovnobežné.

Podľa Tálesovej vety ležia body V_A a V_B na Tálesovej kružnici nad priemerom AB, z vlastností tetivového štvoruholníka ABV_AV_B tak vyplýva $|\measuredangle PQC| = |\measuredangle V_BV_AC| = \alpha$, $|\measuredangle QPC| = |\measuredangle V_AV_BC| = \beta$. Tieto rovnosti už, ako je známe, zaručujú, že aj štvoruholník $ABQP$ je tetivový, teda jeho vrcholy ležia na jednej kružnici, ako sme mali dokázať.

Poznámka. Druhá časť tvrdenia tiež jednoducho vyplýva z vlastností mocnosti bodu ku kružnici: Mocnosť bodu C ku kružnici k je rovná $|CV|^2 = |CP| \cdot |CA|$. Podobne mocnosť bodu C ku kružnici l je rovná $|CV|^2 = |CQ| \cdot |CB|$. Preto $|CP| \cdot |CA| = |CQ| \cdot |CB|$, čo je ekvivalentné s tým, že body A, B, P, Q ležia na jednej kružnici.

To isté môžeme formulovať aj bez počítania, ak využijeme poznatok o chordálach[1] troch kružníc: Označme m kružnicu opísanú trojuholníku ABP. Keďže CV je chordálou kružníc k a l a AC chordálou kružníc k a m, je BC chordálou kružníc l a m. Odtiaľ vyplýva, že kružnice l a m sa pretínajú v bode Q.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Zopakujte so žiakmi vzťahy medzi obvodovým, stredovým a úsekovým uhlom a dokážte ich.

N2. Nech V_A, V_B, V_C sú päty výšok postupne z vrcholov A, B, C v danom ostrouhlom trojuholníku ABC a V priesečník jeho výšok. Dokážte nasledujúce tvrdenia:
   a) os úsečky V_AV_B prechádza stredom strany AB,
   b) body A, V, V_B, V_C ležia na jednej kružnici,
   c) bod V je stredom kružnice vpísanej trojuholníku $V_AV_BV_C$.

   [a) Podľa Tálesovej vety ležia body V_A, V_B na kružnici s priemerom AB, os sečnice V_AV_B tejto kružnice prechádza jej stredom, čo je stred AB. b), c) Podľa Tálesovej vety ležia body V_B, V_C na rôznych polkružniciach s priemerom AV. Podľa vety o obvodovom uhle $|\measuredangle V_BV_CV| = |\measuredangle V_BAV| = 90° - \gamma$. Z tetivového štvoruholníka BV_AVV_C podobne dostaneme $|\measuredangle V_AV_CV| = 90° - \gamma$, teda VV_C je osou uhla $V_AV_CV_B$. Podobne dokážeme, že VV_A je osou uhla $V_BV_AV_C$, teda V je priesečník osí vnútorných uhlov trojuholníka $V_AV_BV_C$.]

D1. V rovine je daný pravouhlý lichobežník $ABCD$ s dlhšou základňou AB a pravým uhlom pri vrchole A. Označme k_1 kružnicu zostrojenú nad stranou AD ako priemerom a k_2 kružnicu prechádzajúcu vrcholmi B, C a dotýkajúcu sa priamky AB. Dokážte, že ak majú kružnice k_1, k_2 vonkajší dotyk v bode P, tak priamka BC je dotyčnicou kružnice opísanej trojuholníku CDP. [52–B–II–4]

D2. V rovine je daný rovnobežník $ABCD$, ktorého uhlopriečka BD je kolmá na stranu AD. Označme M ($M \neq A$) priesečník priamky AC s kružnicou s priemerom AD. Dokážte, že os úsečky BM prechádza stredom strany CD. [56–B–II–3]

D3. Nech K je ľubovoľný vnútorný bod strany AB daného trojuholníka ABC. Priamka CK pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode L ($L \neq C$). Označme k_1 kružnicu opísanú trojuholníku AKL a k_2 kružnicu opísanú trojuholníku BKL.
   a) Dokážte, že priamka AC je dotyčnica kružnice k_1 práve vtedy, keď priamka BC je dotyčnica kružnice k_2.
   b) Predpokladajme, že priamka AC je sečnicou kružnice k_1. Nech P ($P \neq A$) je priesečník priamky AC s kružnicou k_1 a Q ($Q \neq B$) priesečník priamky BC s kružnicou k_2. Dokážte, že bod K leží na úsečke PQ.

   [53–A–II–3]

[1] Chordála dvoch kružníc je množina bodov, ktoré majú k obom kružniciam rovnakú mocnosť, čo v prípade pretínajúcich sa kružníc je ich spoločná sečnica.

4. *Nájdite najmenšiu hodnotu zlomku*

$$V(n)=\frac{n^3-10n^2+17n-4}{n^2-10n+18},$$

pričom n je ľubovoľné prirodzené číslo väčšie ako 2. (*Vojtech Bálint*)

Riešenie. Najskôr vypočítajme hodnoty výrazu $V(n)$ pre niekoľko prirodzených čísel $n \geqq 3$:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$V(n)$	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{7}$	$7\frac{2}{3}$	$10\frac{2}{3}$	2	$7\frac{5}{9}$	$9\frac{2}{9}$	$10\frac{14}{29}$	$11\frac{13}{21}$	$12\frac{40}{57}$	$13\frac{28}{37}$

Z tabuľky vidíme, že $V(n) \geqq 2$ pre všetky $n \in \{3,4,\dots,14\}$, pričom $V(8)=2$. Ukážeme, že pre všetky $n \geqq 9$ už platí $V(n)>2$.

Postupnou úpravou výrazu $V(n)-2$ dostávame (vieme, že $V(8)-2=0$)

$$V(n)-2=\frac{n^3-10n^2+17n-4}{n^2-10n+18}-2=\frac{n^3-12n^2+37n-40}{n^2-10n+18}=$$
$$=\frac{(n-8)(n^2-4n+5)}{(n-5)^2-7}=\frac{(n-8)\bigl((n-2)^2+1\bigr)}{(n-5)^2-7}.$$

Pre $n \geqq 9$ sú čitateľ aj menovateľ posledného zlomku kladné čísla. Preto $V(n)-2>0$ pre každé $n \geqq 9$.

Odpoveď. Najmenšia možná hodnota zlomku $V(n)$ pre prirodzené čísla $n>2$ je rovná 2; túto hodnotu výraz $V(n)$ nadobúda pre $n=8$.

Iné riešenie. Delením oboch polynómov so zvyškom dostaneme

$$V(n)=n-\frac{n+4}{n^2-10n+18}. \tag{1}$$

Ukážeme, že pre $n \geqq 10$ platí

$$\frac{n+4}{n^2-10n+18}<1. \tag{2}$$

Pre prirodzené čísla $n \geqq 10$ je totiž menovateľ $n^2-10n+18=n(n-10)+18$ kladné číslo, a nerovnosť (2) je tak ekvivalentná s nerovnosťou $0<n^2-11n+14=$ $=(n-1)(n-10)+4$, ktorá je pre $n \geqq 10$ zrejme splnená. Pre prirodzené čísla $n \geqq$ $\geqq 10$ preto podľa (1) platí $V(n)>n-1 \geqq 9$. Ako ľahko zistíme (napr. podľa hodnôt v tabuľke na začiatku prvého riešenia), nadobúda výraz $V(n)$ pre prirodzené čísla $n \in$ $\in \{3,4,5,6,7,8,9\}$ menšie hodnoty, medzi nimi je najmenšia $V(8)=2$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Uvažujme výraz

$$V(x) = \frac{5x^4 - 4x^2 + 5}{x^4 + 1}.$$

a) Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí $V(x) \geqq 3$.
b) Nájdite najväčšiu hodnotu $V(x)$.

[58–C–II–1]

N2. Určte všetky dvojice (x, y) celých čísel, ktoré sú riešením nerovnice

$$\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{6}{y\sqrt{x}} < \frac{5\sqrt{y}}{y}.$$

[51–C–I–3]

D1. Určte všetky reálne čísla p také, že pre ľubovoľné kladné čísla x, y platí nerovnosť

$$\frac{x^3 + py^3}{x + y} \geqq xy.$$

[50–B–II–1]

D2. Pre ktoré celé čísla a je maximum aj minimum funkcie

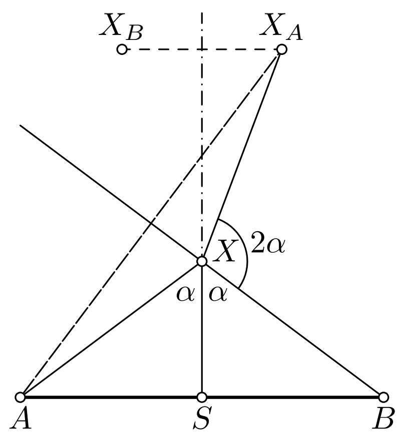
$$y = \frac{12x^2 - 12ax}{x^2 + 36}$$

celé číslo? [48–A–I–3]

---

5. *V rovine je daná úsečka AB. Pre ľubovoľný bod X tejto roviny, ktorý je rôzny od A aj B, označme X_A, resp. X_B obraz bodu A, resp. B v osovej súmernosti podľa priamky XB, resp. XA. Nájdite všetky také body X, ktoré spolu s bodmi X_A, X_B tvoria vrcholy rovnostranného trojuholníka.* (*Pavel Calábek*)

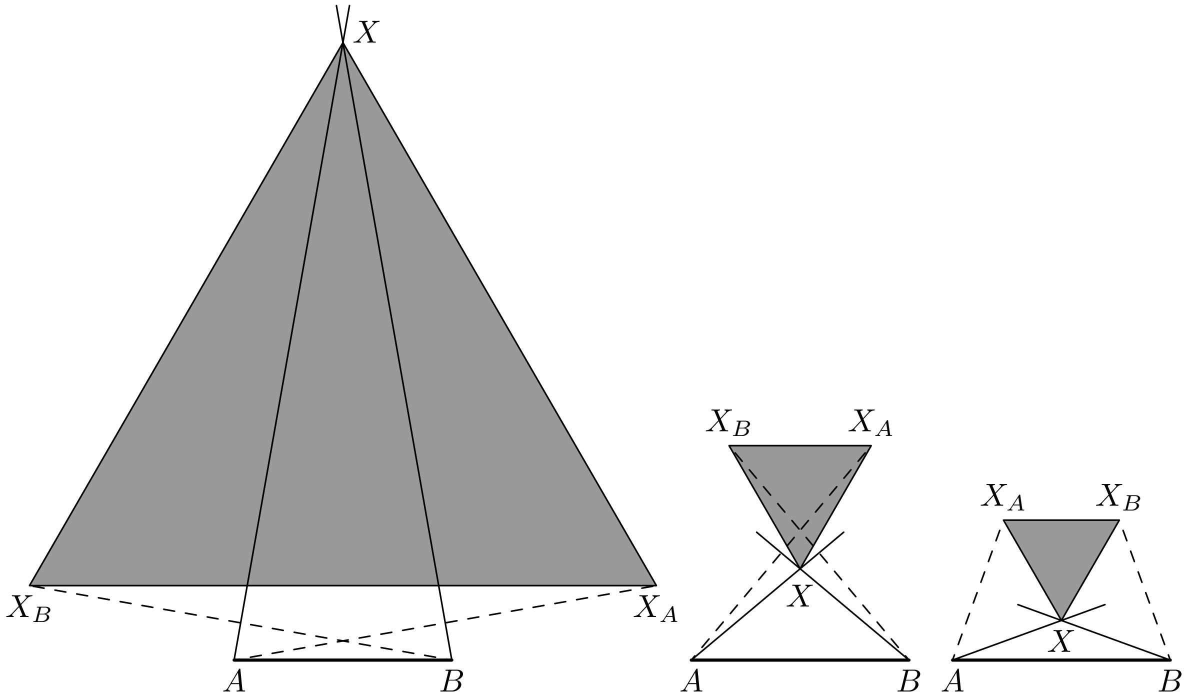
Riešenie. Bod X_A je súmerne združený s bodom A podľa priamky XB, platí teda $|XX_A| = |XA|$. Podobne $|XX_B| = |XB|$. Ak má byť trojuholník XX_AX_B rovnostranný, musí platiť $|XX_A| = |XX_B|$, čiže $|XA| = |XX_A| = |XX_B| = |XB|$. Bod X preto nutne leží na osi o úsečky AB. Naopak, ak X leží na osi úsečky AB, platí podľa rovností z prvých dvoch viet riešenia $|XX_A| = |XX_B|$. Body X, X_A a X_B potom budú vrcholmi rovnostranného trojuholníka práve vtedy, keď veľkosť uhla X_AXX_B bude $60°$.



Obr. 2

Hľadaný bod X zrejme nemôže byť stredom S úsečky AB, pretože potom by bolo $X_A = A$, $X_B = B$ a body X_A, X, X_B by ležali na jednej priamke. Hľadané body X môžu teda ležať na priamke o mimo úsečky AB. Vzhľadom na zrejmú symetriu sa ďalej obmedzíme len na body X v jednej z polrovín určených priamkou AB.

Označme α veľkosť ostrého uhla AXS (obr. 2), ktorý zrejme môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu z intervalu $(0°, 90°)$. Zo zhodnosti orientovaných uhlov AXB a BXX_A vyplýva, že orientovaný uhol SXX_A má potom veľkosť 3α. Ako už vieme, bod X bude vrcholom rovnostranného trojuholníka XX_AX_B práve vtedy, keď bude priamka XX_A zvierať s osou o uhol $30°$, čo vzhľadom na nerovnosti $0^\circ < 3\alpha < 270^\circ$ nastane jedine pre $3\alpha \in \{30^\circ, 150^\circ, 210^\circ\}$, čiže $\alpha \in \{10^\circ, 50^\circ, 70^\circ\}$.



Obr. 3

Na obr. 3 vidíme všetky tri zodpovedajúce riešenia. Sú to vrcholy rovnoramenných trojuholníkov so základňou AB a uhlom $2\alpha \in \{20^\circ, 100^\circ, 140^\circ\}$ pri vrchole X. Ďalšie tri riešenia (súmerne združené podľa priamky AB) existujú v opačnej polrovine určenej priamkou AB.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Nech P je vnútorný bod konvexného uhla BAC. Označme K a M obrazy bodu P v osových súmernostiach podľa priamok AB a AC. Určte veľkosť uhla KAM. [$|\measuredangle KAM| = 2|\measuredangle BAC|$, ak je uhol BAC ostrý alebo pravý; $|\measuredangle KAM| = 360^\circ - 2|\measuredangle BAC|$, ak je uhol BAC tupý.]

N2. Nech P je vnútorný bod ostrouhlého trojuholníka ABC s daným obsahom S. Označme K, L a M obrazy bodu P v osových súmernostiach podľa priamok AB, BC a CA. Vypočítajte obsah šesťuholníka $AKBLCM$ a zistite, kedy je tento šesťuholník pravidelný. [Obsah je vždy $2S$, šesťuholník je pravidelný iba v prípade, keď je trojuholník ABC rovnostranný a bod P je jeho ťažiskom.]

N3. Nech P je ľubovoľný vnútorný bod rovnostranného trojuholníka ABC. Uvažujme obrazy K, L a M bodu P v osových súmernostiach s osami AB, BC a CA. Určte množinu všetkých bodov P takých, že trojuholník KLM je rovnoramenný. [53–C–I–4]

N4. Nech A a B sú rôzne body roviny. Ďalej je daný orientovaný uhol ω ($0^\circ < \omega < 90^\circ$). Pre ľubovoľný bod X označme postupne X_A, X_B obrazy bodu X v otočeniach okolo stredov A a B o uhol ω. Určte všetky body X, pre ktoré je trojuholník XX_AX_B rovnostranný. [48–B–II–4]

D1. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník, ktorého vnútorný uhol pri vrchole B má veľkosť 60°.

a) Dokážte, že ak $|BC| = |CD|$, tak $|CD| + |DA| = |AB|$.

b) Rozhodnite, či platí opačná implikácia.

[53–A–I–5]

6. *Je dané prirodzené číslo $k < 12$. Vo vrcholoch pravidelného 12-uholníka sú napísané čísla $1, 2, \ldots, 12$ (ako na ciferníku hodín). V jednom kroku môžeme buď vymeniť niektoré dve protiľahlé čísla, alebo zvoliť ľubovoľných k susedných vrcholov a v nich napísané čísla zväčšiť o 1. Označme $T(k)$ nasledovné tvrdenie: „Po konečnom počte krokov možno dostať všetkých 12 čísel rovnakých.“ Dokážte, že $T(2)$ neplatí, $T(5)$ platí, a rozhodnite o platnosti $T(3)$.* (Ján Mazák)

Riešenie. Vrcholy pravidelného dvanásťuholníka očíslujme rovnako ako na ciferníku hodín. Pre $i \in \{1, 2, \ldots, 12\}$ označme a_i číslo napísané v i-tom vrchole dvanásťuholníka; na začiatku je podľa zadania $a_i = i$ pre všetky $i \in \{1, 2, \ldots, 12\}$.

Najskôr ukážeme, že $T(2)$ neplatí. Uvažujme súčty

$$S_1 = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11},$$
$$S_2 = a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12}.$$

Na začiatku je $S_1 = 36$ a $S_2 = 42$. Každé dve protiľahlé čísla sa nachádzajú spoločne v tom istom súčte, to znamená, že po ich výmene sa žiadny z oboch súčtov nezmení. Navyše žiadne dve susedné čísla nepatria do toho istého súčtu, takže po kroku spočívajúcom vo voľbe dvoch susedných vrcholov a zväčšení v nich napísaných čísel o 1 sa oba súčty zväčšia o 1, takže ich rozdiel $S_2 - S_1$ sa nezmení. Keďže na začiatku je $S_2 - S_1 = 6$, nemožno sa nikdy dostať do situácie, keď by boli všetky čísla a_i rovnaké. V takom prípade by totiž bolo $S_1 = S_2$ a rozdiel $S_2 - S_1$ by bol nulový. Preto tvrdenie $T(2)$ neplatí.

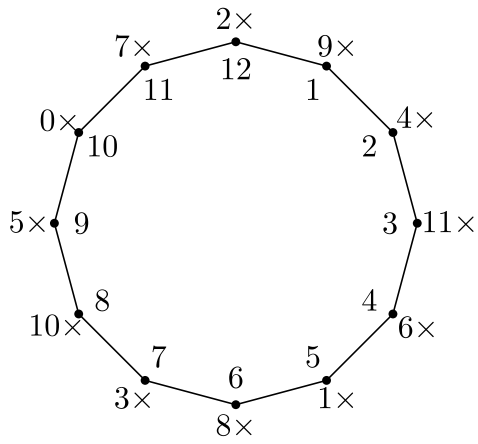
Podobne dokážeme, že neplatí ani tvrdenie $T(3)$. Uvažujeme tentoraz tri súčty

$$S_1 = a_1 + a_4 + a_7 + a_{10},$$
$$S_2 = a_2 + a_5 + a_8 + a_{11},$$
$$S_3 = a_3 + a_6 + a_9 + a_{12},$$

pre ktoré na začiatku platí $S_1 = 22$, $S_2 = 26$, $S_3 = 30$. Po každom kroku sa buď žiadny z troch súčtov nezmení (ak vymeníme dvojicu protiľahlých čísel), alebo sa všetky tri zväčšia o 1 (ak zväčšíme trojicu susedných čísel). Preto po žiadnom počte krokov nemôžu byť vo všetkých vrcholoch napísané rovnaké čísla, vtedy by totiž platilo $S_1 = S_2 = S_3$.

Nakoniec ukážeme, že tvrdenie $T(5)$ platí. Pod päticou čísel so stredom vo vrchole i budeme rozumieť čísla vo vrcholoch $i-2$, $i-1$, i, $i+1$, $i+2$ so zvyčajnou dohodou, že vrchol -1 je vrchol 11, vrchol 0 je 12, vrchol 13 je 1 a vrchol 14 je 2. Zväčšíme pätice so stredmi v jednotlivých vrcholoch toľkokrát, koľko je naznačené v obr. 4, t. j. päticu so stredom vo vrchole 1 zväčšíme deväťkrát, päticu so stredom vo vrchole 2 štyrikrát, päticu so stredom vo vrchole 3 jedenásťkrát atď. až päticu so stredom vo vrchole 12 dvakrát. Číslo vo vrchole 1 je na začiatku 1 a zväčší sa iba pri zväčšení pätíc so stredmi vo vrcholoch 11, 12, 1, 2 a 3. Po týchto krokoch bude teda $a_1 = 1+7+2+9+4+11 = 34$, podobne sa zväčšia aj čísla pri ďalších vrcholoch a bude platiť

$$\begin{aligned}
a_2 &= 2+2+9+4+11+6=34,\\
a_3 &= 3+9+4+11+6+1=34,\\
a_4 &= 4+4+11+6+1+8=34,\\
a_5 &= 5+11+6+1+8+3=34,\\
a_6 &= 6+6+1+8+3+10=34,\\
a_7 &= 7+1+8+3+10+5=34,\\
a_8 &= 8+8+3+10+5+0=34,\\
a_9 &= 9+3+10+5+0+7=34,\\
a_{10} &= 10+10+5+0+7+2=34,\\
a_{11} &= 11+5+0+7+2+9=34,\\
a_{12} &= 12+0+7+2+9+4=34.
\end{aligned}$$



Obr. 4

Vidíme, že po opísaných krokoch (tie spočívali len vo zväčšení pätice susedných čísel, výmenu protiľahlých čísel sme nevyužili) bude v každom vrchole dvanásťuholníka napísané zhodné číslo 34.

Poznámka. Ukážme, ako dokázať tvrdenie $T(5)$ systematickejšie, aj keď zďaleka nie tak efektívne. Ak zväčšíme päťkrát čísla v po sebe nasledujúcich päticiach vrcholov, teda postupne v päticiach vrcholov

$$(1,2,3,4,5),\quad (6,7,8,9,10),\quad (11,12,1,2,3),\quad (4,5,6,7,8),\quad (9,10,11,12,1),$$

dosiahneme vďaka rovnosti $5\cdot 5 = 2\cdot 12+1$ to, že čísla vo všetkých vrcholoch s výnimkou prvého zväčšíme o 2, zatiaľ čo číslo v prvom vrchole zväčšíme o 3. Podobne samozrejme môžeme zväčšiť číslo v ľubovoľnom vrchole o o jedna viac ako vo všetkých ostatných vrcholoch, takže opakovaním uvedeného postupu jedenásťkrát pre vrchol 1, desaťkrát pre vrchol 2, … a napokon jedenkrát pre vrchol 11 dosiahneme to, že čísla vo všetkých vrcholoch budú rovnaké. Dodajme, že analogickým postupom možno vďaka rovnostiam $7\cdot 7 = 4\cdot 12+1$ a $11\cdot 11 = 10\cdot 12+1$ dokázať aj tvrdenia $T(7)$ a $T(11)$, nie však žiadne tvrdenie $T(k)$ s číslom k súdeliteľným s číslom 12.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Na tabuli sú napísané celé nezáporné čísla od 0 do 1 234. Uvažujme nasledujúcu operáciu: Zotrieme ľubovoľné dve čísla a namiesto nich na tabuľu napíšeme ich rozdiel (od väčšieho čísla odčítame menšie). Túto operáciu opakujeme, kým na tabuli neostane posledné číslo. Môže na tabuli ostať číslo 2? [Nie. Uvedenou operáciou sa nemení parita súčtu všetkých čísel napísaných na tabuli, ktorá je na začiatku nepárna.]

N2. Na tabuli sú napísané všetky prirodzené čísla od 1 do 100. Uvažujme nasledujúcu operáciu: Zotrieme ľubovoľné dve čísla a namiesto nich napíšeme na tabuľu ich súčet. Túto operáciu opakujeme, kým na tabuli neostanú posledné tri čísla. Môžeme týmto spôsobom nakoniec získať tri po sebe idúce čísla? [Súčet troch po sebe idúcich čísel je deliteľný tromi, naproti tomu nemenný súčet všetkých čísel na tabuli deliteľný tromi nie je.]

N3. Na stole je n pohárov, všetky sú postavené dnom nahor. V jednom kroku môžeme otočiť ľubovoľných k pohárov naopak (k je pevne dané). Je možné, aby po konečnom počte krokov bolo všetkých n pohárov postavených dnom nadol? Riešte najskôr pre $n = 9$ a $k = 5$, potom pre $n = 9$ a $k = 4$. [Pre $n = 9$ a $k = 5$ to zrejme možné je. Pre $n = 9$ a $k = 4$ to možné nie je, pretože všeobecne platí: pri párnom k a ľubovoľnom

n sa nemení parita počtu pohárov postavených dnom nahor (t. j. tento počet je buď stále párny, alebo stále nepárny).]

N4. Na hranici kruhu stoja 2 jednotky a 48 núl v poradí $1, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0$. V jednom kroku je dovolené pripočítať číslo 1 ku ktorýmkoľvek dvom susedným číslam. Môžeme po niekoľkých krokoch dosiahnuť, aby všetkých 50 čísel bolo rovnakých? [Nie je to možné; označte čísla postupne $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$ a vysvetlite, prečo výraz $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{49} - x_{50}$ nemení svoju hodnotu (nezabudnite, že spolu susedia aj x_1 a x_{50}).]

D1. Daných je n ($n \geqq 2$) prirodzených čísel, s ktorými môžeme urobiť nasledujúcu operáciu: vyberieme niekoľko z nich, ale nie všetky a nahradíme ich ich aritmetickým priemerom. Zistite, či je možné pre ľubovoľnú počiatočnú n-ticu dostať po konečnom počte krokov všetky čísla rovnaké, ak n sa rovná a) 2 000, b) 35, c) 3, d) 17. [51–B–I–4]

D2. Na každej stene kocky je napísané práve jedno celé číslo. V jednom kroku zvolíme ľubovoľné dve susedné steny kocky a čísla na nich napísané zväčšíme o 1. Určte nutnú a postačujúcu podmienku pre očíslovanie stien kocky na začiatku, aby po konečnom počte vhodných krokov boli na všetkých stenách kocky rovnaké čísla. [60–A–I–5]

D3. V každom vrchole pravidelného 2008-uholníka leží jedna minca. Vyberieme dve mince a premiestnime každú z nich do susedného vrcholu tak, že jedna sa posunie v smere a druhá proti smeru chodu hodinových ručičiek. Rozhodnite, či je možné týmto spôsobom všetky mince postupne presunúť:
   a) na 8 kôpok po 251 minciach,
   b) na 251 kôpok po 8 minciach.

[58–A–I–5]

D4. Krokom budeme rozumieť nahradenie usporiadanej trojice celých čísel (p, q, r) trojicou $(r + 5q, 3r - 5p, 2q - 3p)$. Rozhodnite, či existuje celé číslo k také, že z trojice $(1, 3, 7)$ vznikne po konečnom počte krokov trojica $(k, k + 1, k + 2)$. [52–B–I–4]

D5. Daných je n nezáporných čísel. Môžeme vybrať ľubovoľné dve z nich, napríklad a a b, $a \leqq b$, a zameniť ich číslami 0 a $b - a$. Dokážte, že opakovaním tejto operácie je možné všetky dané čísla zmeniť na nuly práve vtedy, keď pôvodné čísla je možné rozdeliť do dvoch skupín tak, že súčty čísel v oboch skupinách sú rovnaké. [51–B–II–4]

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

Recenzenti: Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný

Redakčná úprava: Pavel Calábek, Karel Horák, Peter Novotný, Jaromír Šimša

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012