62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie C*

---

1. *Štvorcová tabuľka je rozdelená na* 16×16 *políčok. Kobylka sa po nej pohybuje dvoma smermi: vpravo alebo dole, pričom strieda skoky o dve a o tri políčka (t. j. žiadne dva po sebe idúce skoky nie sú rovnako dlhé). Začína skokom dĺžky dva z ľavého horného políčka. Koľkými rôznymi cestami sa môže kobylka dostať na pravé dolné políčko? (Pod cestou máme na mysli postupnosť políčok, na ktoré kobylka doskočí.)* (Peter Novotný)

Riešenie. V priebehu svojej cesty sa kobylka musí posunúť o celkom 15 políčok doprava a 15 políčok nadol. Dohromady sa tak posunie o 30 políčok, takže dvojicu skokov dĺžky $2+3=5$ zopakuje celkom šesťkrát. Presnejšie vyjadrené, jej jednotlivé skoky budú mať dĺžky postupne

$$2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3,\ 2,\ 3, \tag{1}$$

takže pôjde šesťkrát o skok dĺžky dva (*2-skok*) a šesťkrát o skok dĺžky tri (*3-skok*). Ak jednotlivým 2-skokom a 3-skokom pripíšeme poradové čísla podľa ich pozície v (1), bude kobylkina cesta jednoznačne určená výberom poradových čísel skokov smerujúcich doprava (zvyšné potom budú smerovať nadol). Musíme pritom dodržať len to, aby súčet dĺžok takto vybraných skokov (t. j. skokov doprava) bol rovný 15. To možno povolenými dĺžkami dosiahnuť (bez rozlíšenia poradia skokov) nasledujúcimi spôsobmi:

$$\begin{aligned}15 &= 3+3+3+3+3,\\ 15 &= 3+3+3+2+2+2,\\ 15 &= 3+2+2+2+2+2+2.\end{aligned}$$

V prvom prípade bude päť zo šiestich 3-skokov doprava (a všetky 2-skoky nadol), takže cesta bude určená len poradovým číslom toho (jediného) 3-skoku, ktorý bude smerovať nadol. Preto je ciest tohto typu práve 6.

V druhom prípade bude cesta určená poradovými číslami troch 3-skokov doprava a poradovými číslami troch 2-skokov doprava. Výbery oboch trojíc sú nezávislé (t. j. možno ich spolu ľubovoľne kombinovať) a pri každom z nich vyberáme tri prvky zo šiestich, čo možno urobiť 20 spôsobmi.[1] Preto je ciest tohto typu $20 \cdot 20 = 400$.

V treťom prípade je kobylkina cesta určená len poradovým číslom toho jediného 3-skoku, ktorý bude smerovať doprava, takže ciest tohto typu je (rovnako ako v prvom prípade) opäť 6.

Odpoveď. Hľadaný celkový počet kobylkiných ciest je $6+400+6=412$.

Iné riešenie. Zadanú úlohu „pre pravé dolné políčko“ vyriešime tak, že budeme postupne určovať počty kobylkiných ciest, ktoré vedú do jednotlivých políčok tabuľky (políčka budeme postupne voliť od ľavého horného políčka po jednotlivých vedľajších diagonálach[2], lebo ako ľahko zistíme, po určitom počte skokov skončí kobylka na tej istej vedľajšej diagonále; tak sa nakoniec dostaneme k tomu najvzdialenejšiemu, teda

---

[1] Väčšina riešiteľov kategórie C ešte zrejme nepozná kombinačné čísla, hodnotu $\binom{6}{3}=20$ však možno vypočítať aj vypísaním jednotlivých možností.

[2] V tomto prípade pod vedľajšou diagonálou chápeme skupinu políčok, ktorých stredy ležia na priamke kolmej na spojnicu stredu začiatočného políčka so stredom koncového políčka.

pravému dolnému políčku). Pre zjednodušenie ďalšieho výkladu označme (i, j) políčko v i-tom riadku a j-tom stĺpci.

Je zrejmé, že povoleným spôsobom skákania sa kobylka vie dostať len na niektoré políčka celej tabuľky. Po prvom skoku (ktorý musí byť 2-skok z políčka $(1, 1)$) sa kobylka dostane len na políčko $(1, 3)$ alebo $(3, 1)$, po druhom skoku (teda 3-skoku) to bude niektoré z políčok

$$(1, 6),\ (3, 4),\ (4, 3),\ (6, 1).$$

Vo všetkých doteraz uvedených políčkach je v tabuľke vpísané číslo 1, lebo na každé z nich vedie jediná kobylkina cesta. Situácia sa zmení po treťom skoku (2-skoku) kobylky, lebo na políčka $(3, 6)$ a $(6, 3)$ vedú vždy dve rôzne cesty, a to z políčok $(1, 6)$ a $(3, 4)$, resp. z políčok $(6, 1)$ a $(4, 3)$. Takto v ďalšom kroku našej úvahy určíme všetky políčka, na ktoré sa kobylka môže dostať po štyroch skokoch, aj počty ciest, ktoré v týchto políčkach končia. V zapĺňaní tabuľky týmito číslami (postupom podľa počtu skokov kobylky) pokračujeme, až sa dostaneme do „cieľového" políčka $(16, 16)$. Pritom neustále využívame to, že posledný skok kobylky na dané políčko má danú dĺžku a jeden či oba možné smery. V prvom prípade číslo z predposledného políčka na ceste na posledné políčko opíšeme, v druhom prípade tam napíšeme súčet čísel z oboch možných predposledných políčok.

1		1			1		1			1		1			1
1			1		2			2		3			3		4
		1		1			2		2			3		3	
			1			1		3			3		6		
1		2			4		6			9		12			16
				1		2			4		7			10	
1			2		6			9		18			24		40
		2		3			9		13			25		35	
			2			4		13			20		44		
1		3			9		18			36		61			101
				3		7			20		40			75	
1			3		12			25		61			105		206
		3		6			24		44			105		180	
			3			10		35			75		180		
1		4			16		40			101		206			412

Rovnako ako v prvom riešení prichádzame k výsledku 412.

Návodné a doplňujúce úlohy:

N1. Kobylka skáče po úsečke dĺžky 10 cm a to skokmi o 1 cm alebo o 2 cm (vždy rovnakým smerom). Koľkými spôsobmi sa môže dostať z jedného krajného bodu úsečky do druhého? [Ak označíme a_n počet spôsobov, koľkými sa môže kobylka dostať do bodu vzdialeného n cm od začiatočného bodu úsečky, tak pre každé $n \geqq 1$ platí $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Keďže $a_1 = 1$ a $a_2 = 2$, môžeme ďalšie počty $a_3, a_4, \ldots$ postupne počítať podľa vzorca z predošlej vety, až dospejeme k hodnote $a_{10} = 89$. Pri inom postupe je možné rozdeliť všetky cesty podľa toho, koľko pri nich urobí kobylka skokov dĺžky dva (ich počet môže byť 0, 1, 2, 3, 4 alebo 5 a tým je tiež určený počet skokov dĺžky 1: 10, 8, 6, 4, 2 alebo 0). Ku každému takému počtu potom určíme počet všetkých rôznych poradí jednotiek a dvojok (dávajúcich v súčte 10). Dostaneme tak $1+9+28+ + 35 + 15 + 1 = 89$ možných ciest.]

N2. Škriatok sa pohybuje v tabuľke 10×15 skokmi o jedno políčko nahor alebo o jedno políčko doprava. Koľkými rôznymi cestami sa môže dostať z ľavého dolného do pravého horného políčka? [Škriatok urobí 9 skokov nahor a 14 skokov doprava. Jeho cestu určíme, keď v poradí všetkých 23 skokov vyberieme tých deväť, ktoré povedú nahor. Počet týchto výberov 9 prvkov z daných 23 je rovný zlomku $\dfrac{23 \cdot 22 \cdots 16 \cdot 15}{9 \cdot 8 \cdots 2 \cdot 1}$, teda číslu 817 190.]

D1. Určte počet dvojíc (a, b) prirodzených čísel ($1 \leqq a < b \leqq 86$), pre ktoré je súčin ab deliteľný tromi. [C–51–II–1]

D2. Určte počet všetkých štvorciferných prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné šiestimi a v ich zápise sa vyskytujú práve dve jednotky. [C–56–S–1]

---

2. *Pre kladné reálne čísla a, b, c, d platí*

$$a + b = c + d, \qquad ad = bc, \qquad ac + bd = 1.$$

Akú najväčšiu hodnotu môže mať súčet $a + b + c + d$? (*Ján Mazák*)

Riešenie. Najskôr ukážeme, že prvé dve rovnosti zo zadania úlohy sú splnené len vtedy, keď platí $a = c$ a súčasne $b = d$. Naozaj, vďaka tomu, že zadané čísla sú kladné (a teda rôzne od nuly), môžeme uvedené rovnosti zapísať ako

$$a\Bigl(1 + \frac{b}{a}\Bigr) = c\Bigl(1 + \frac{d}{c}\Bigr) \quad \text{a} \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Podľa druhej rovnosti vidíme, že súčty v oboch zátvorkách z prvej rovnosti majú rovnakú kladnú hodnotu, takže sa musia rovnať prvé činitele oboch jej strán. Platí teda $a = c$, odkiaľ už vyplýva aj rovnosť $b = d$.

Keď už vieme, že platí $a = c$ a $b = d$, vystačíme ďalej len s premennými a a b a nájdeme najväčšiu hodnotu zadaného súčtu

$$S = a + b + c + d = 2(a + b)$$

za jedinej podmienky, totiž že kladné čísla a, b spĺňajú rovnosť $a^2 + b^2 = 1$, ktorá je vyjadrením tretej zadanej rovnosti $ac + bd = 1$ (prvé dve sú vďaka rovnostiam $a = c$ a $b = d$ zrejmé).

Všimnime si, že pre druhú mocninu (kladného) súčtu S platí

$$S^2 = 4(a + b)^2 = 4(a^2 + b^2) + 8ab = 4 \cdot 1 + 8ab = 4(1 + 2ab),$$

takže hodnota S bude najväčšia práve vtedy, keď bude najväčšia hodnota $2ab$. Zo zrejmej nerovnosti $(a - b)^2 \geqq 0$ po roznásobení však dostaneme

$$2ab \leqq a^2 + b^2 = 1,$$

pritom rovnosť $2ab = 1$ nastane práve vtedy, keď bude platiť $a = b$, čo pre kladné čísla a, b spolu s podmienkou $a^2 + b^2 = 1$ vedie k jedinej vyhovujúcej dvojici $a = b = 1/\sqrt{2}$. Najväčšia hodnota výrazu $2ab$ je teda 1, takže najväčšia hodnota výrazu S^2 je $4(1 + + 1) = 8$, a teda najväčšia hodnota S je $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Dosiahne sa pre jedinú prípustnú štvoricu $a = b = c = d = 1/\sqrt{2}$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. Ukážte, že nerovnosť $\frac{1}{2}(u+v) \geqq \sqrt{uv}$ medzi aritmetickým a geometrickým priemerom dvoch ľubovoľných nezáporných čísel u a v vyplýva zo zrejmej nerovnosti $(a-b)^2 \geqq 0$ vhodnou voľbou hodnoty a a b. [Zvoľte $a = \sqrt{u}$ a $b = \sqrt{v}$.] Podobným obratom alebo priamym použitím uvedenej AG-nerovnosti (v niektorých prípadoch aj niekoľkonásobným) dokážte ďalšie nerovnosti

$$2abc \leqq a^2 + b^2c^2, \quad a^4 + b^4 \geqq a^3b + ab^3, \quad (1+a+b)^2 \geqq 3(a+b+ab),$$
$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} \geqq \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{ab} + \frac{1}{cd} \geqq \frac{8}{(a+b)(c+d)}, \quad \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right) \geqq 8,$$

v ktorých a, b, c, d označujú ľubovoľné kladné čísla.

D1. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla a, b platí

$$\sqrt{ab} \leqq \frac{2(a^2+3ab+b^2)}{5(a+b)} \leqq \frac{a+b}{2},$$

a pre každú z oboch nerovností zistite, kedy prechádza na rovnosť. [59–C–I–5]

D2. Dokážte, že pre ľubovoľné rôzne kladné čísla a, b platí

$$\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

[58–C–I–6]

D3. Dokážte, že pre ľubovoľné nezáporné čísla a, b, c platí

$$(a+bc)(b+ac) \geqq ab(c+1)^2.$$

Zistite, kedy nastane rovnosť. [58–C–S–1]

D4. Ak reálne čísla a, b, c, d spĺňajú rovnosti

$$a^2 + b^2 = b^2 + c^2 = c^2 + d^2 = 1,$$

platí nerovnosť

$$ab + ac + ad + bc + bd + cd \leqq 3.$$

Dokážte a zistite, kedy za daných podmienok nastane rovnosť. [55–C–II–2]

D5. Nech a, b, c, d sú také reálne čísla, že $a+d = b+c$. Dokážte nerovnosť

$$(a-b)(c-d) + (a-c)(b-d) + (d-a)(b-c) \geqq 0.$$

[54–C–I–1]

---

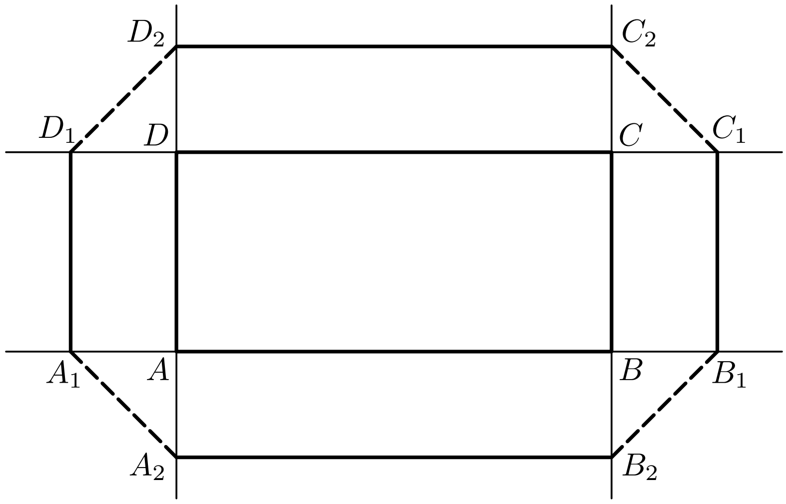
3. *Daný je obdĺžnik $ABCD$ s obvodom o. V jeho rovine nájdite množinu všetkých bodov, ktorých súčet vzdialeností od priamok AB, BC, CD, DA je rovný $\frac{2}{3}o$.* (*Tomáš Jurík*)

Riešenie. Požadovanú hodnotu súčtu štyroch vzdialeností zapíšeme v tvare

$$\frac{2}{3}o = \frac{1}{6}o + \frac{1}{2}o = \frac{1}{6}o + |AB| + |BC|. \tag{1}$$

Pre ľubovoľný bod v páse určenom priamkami AB a CD platí, že súčet jeho vzdialeností od týchto dvoch rovnobežiek je rovný ich vzdialenosti, t.j. $|BC|$. Pre ľubovoľný bod zvonka tohto pásu je súčet dvoch uvažovaných vzdialeností rovný súčtu hodnoty $|BC|$ a dvojnásobku vzdialenosti od bližšej z oboch rovnobežiek. Podobné dve tvrdenia platia pre súčet vzdialeností ľubovoľného bodu od rovnobežiek BC a AD vo vzťahu k ich vzdialenosti $|AB|$. Vzhľadom na vyjadrenie (1) tak môžeme urobiť prvé dva závery.

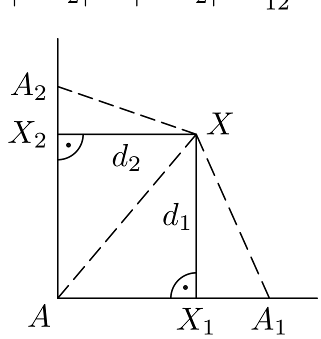
(1) V páse medzi priamkami AB a CD sú hľadanými bodmi práve tie, ktorých súčet vzdialeností od priamok BC a AD je rovný $\frac{1}{6}o+|AB|$. Sú to teda body, ktoré ležia zvonka pásu určeného priamkami BC a AD a majú od bližšej z nich vzdialenosť rovnú $\frac{1}{6}o : 2 = \frac{1}{12}o$. Množinu hľadaných bodov v páse medzi AB a CD tak tvoria dve úsečky B_1C_1 a A_1D_1 znázornené na obr. 1. Ich krajné body A_1, B_1 ležia na priamke AB zvonka úsečky AB tak, že $|AA_1| = |BB_1| = \frac{1}{12}o$; krajné body C_1, D_1 ležia na priamke CD zvonka úsečky CD tak, že $|CC_1| = |DD_1| = \frac{1}{12}o$.



Obr. 1

(2) V páse medzi priamkami BC a AD sú hľadanými bodmi práve tie, ktorých súčet vzdialeností od priamok AB a CD je rovný $\frac{1}{6}o + |BC|$. Sú to teda body, ktoré ležia zvonka pásu určeného priamkami AB a CD a ktoré majú od bližšej z nich vzdialenosť $\frac{1}{12}o$. Množinu hľadaných bodov v páse medzi BC a AD tak tvoria dve úsečky A_2B_2 a C_2D_2, pritom krajné body B_2, C_2 ležia na priamke BC zvonka úsečky BC tak, že $|BB_2| = |CC_2| = \frac{1}{12}o$ a krajné body A_2, D_2 ležia na priamke AD zvonka úsečky AD tak, že $|AA_2| = |DD_2| = \frac{1}{12}o$.

Ostáva nájsť hľadané body mimo zjednotenia oboch uvažovaných pásov, teda body ležiace v nejakom zo štyroch pravých uhlov A_1AA_2, B_1BB_2, C_1CC_2, D_1DD_2. Z vyššie uvedených úvah vyplýva, že v každom z týchto uhlov hľadáme práve tie body, ktorých súčet vzdialeností od oboch ramien uhla je rovný hodnote $\frac{1}{12}o$. Vzhľadom na symetriu ukážeme len to, že také body uhla A_1AA_2 vyplnia úsečku A_1A_2; v ostatných troch uhloch to potom budú úsečky B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 (obr. 1).



Obr. 2

Všimnime si najskôr, že body A_1, A_2 sú jediné body na ramenách uhla A_1AA_2, ktoré majú požadovanú vlastnosť. Pre ľubovoľný vnútorný bod X uhla A_1AA_2 označme d_1, d_2 vzdialenosti bodu X od ramien AA_1, resp. AA_2.

Hľadáme potom práve tie body X, pre ktoré platí $d_1+d_2=\frac{1}{12}o$ (obr. 2). Túto „rovnicu" teraz vyriešime úvahou o obsahu S útvaru AA_1XA_2, ktorý je buď trojuholník, alebo konvexný či nekonvexný štvoruholník.

Obsah S je vždy rovný súčtu obsahov dvoch trojuholníkov AA_1X a AA_2X:

$$S=S_{AA_1X}+S_{AA_2X}=\frac{1}{2}|AA_1|d_1+\frac{1}{2}|AA_2|d_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}o\cdot(d_1+d_2).$$

Rovnica $d_1+d_2=\frac{1}{12}o$ je tak splnená práve vtedy, keď obsah S má rovnakú hodnotu ako obsah S_0 pravouhlého trojuholníka AA_1A_2, ktorého obe odvesny majú zhodnú dĺžku $\frac{1}{12}o$. Hľadané body X sú teda práve tie, pre ktoré je útvar AA_1XA_2 trojuholník; ak je totiž AA_1XA_2 konvexný, resp. nekonvexný štvoruholník, platí zrejme $S>S_0$, resp. $S<S_0$. Hľadané body X uhla AA_1A_2 preto naozaj tvoria úsečku A_1A_2.

Odpoveď. Hľadaná množina je zjednotením ôsmich úsečiek, ktoré tvoria hranicu osemuholníka $A_1A_2B_2B_1C_1C_2D_2D_1$.

Poznámka. Z obr. 2 je tiež zrejmé, že rovnica $d_1+d_2=c$, pričom $c=|AA_1|=|AA_2|$, bude splnená práve vtedy, keď bude $|X_1A_1|=d_1$ a $|X_2A_2|=d_2$, t. j. práve vtedy, keď budú oba trojuholníky XX_1A_1 a XX_2A_2 rovnoramenné. To zrejme nastane práve vtedy, keď bude uhol A_1XA_2 priamy, pretože $|\measuredangle AA_1A_2|=45°$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V rovine je daných k navzájom rôznych rovnobežiek. Ktoré body tejto roviny majú najmenší súčet vzdialeností od týchto k rovnobežiek? Odpoveď si premyslite najskôr pre malé hodnoty $k=2,3,4,\dots$ a potom spravte zovšeobecnenie. [V prípade párneho k sa jedná o body pásu medzi dvoma „prostrednými" rovnobežkami, v prípade nepárneho k sú to body na prostrednej rovnobežke.]

N2. Daný je pravouhlý rovnoramenný trojuholník ABC s odvesnami AC, BC dĺžky 1 cm. V pravom uhle ACB určte všetky tie body, ktorých súčet vzdialeností od ramien CA, CB je rovný a) 1 cm, b) 3 cm. [V prípade a) pre hľadaný bod X porovnajte obsah útvaru vzniknutého zlepením trojuholníkov ACX a BCX s obsahom trojuholníka ABC a odvoďte odtiaľ, že vyhovujúce body X vyplnia úsečku AB. V prípade b) nahraďte body A, B vhodnými bodmi A', B' na ramenách CA, resp. CB a použite ten istý postup ako v prípade a).]

D1. Je daná úsečka AB. Zostrojte bod C tak, aby sa obsah trojuholníka ABC rovnal 1/8 obsahu S štvorca so stranou AB a súčet obsahov štvorcov so stranami AC a BC sa rovnal S. [C–54–S–3]

---

4. *Rozhodnite, či z ľubovoľných siedmich vrcholov daného pravidelného 19-uholníka možno vždy vybrať štyri, ktoré sú vrcholmi lichobežníka.* (Jaromír Šimša)

Riešenie. Označme S stred daného pravidelného 19-uholníka $A_1A_2\dots A_{19}$. Os každej úsečky A_iA_j je priamka, ktorá okrem bodu S prechádza ešte niektorým vrcholom A_k (to vďaka tomu, že číslo 19 je nepárne). Preto sa dajú všetky úsečky A_iA_j rozdeliť na 19 skupín, pričom v každej skupine budú navzájom rovnobežné úsečky so spoločnou osou, ktorou je vždy jedna z priamok SA_k. V každej skupine je pritom zrejme $(19-1):2=9$ úsečiek a každé dve z nich sú základňami lichobežníka (nemôže sa jednať o rovnobežník, lebo žiadna z úsečiek A_iA_j neprechádza stredom S, opäť vďaka tomu, že číslo 19 je nepárne).

Počet všetkých úsečiek A_iA_j s krajnými bodmi v ľubovoľne vybranej sedemprvkovej množine vrcholov je $(7\cdot 6):2=21>19$, takže dve z týchto úsečiek ležia v rovnakej z 19 opísaných skupín. Tým je existencia žiadaného lichobežníka dokázaná, nech už je sedemprvková množina vrcholov zvolena akokoľvek.

Poznámka. Úvodnú úvahu o osi úsečky A_iA_j možno vynechať. Namiesto toho môžeme rovno opísať uvedených 19 deväťprvkových skupín navzájom rovnobežných úsečiek a potom skonštatovať, že ide o všetky možné úsečky A_iA_j, lebo tých je $(19 \cdot 18)$: $: 2 = 19 \cdot 9$, teda práve toľko, koľko je úsečiek v opísaných 19 skupinách.

Iné riešenie. Zatiaľ čo v prvom riešení sme uvažovali o základniach hľadaného lichobežníka, teraz sa zameriame na jeho ramená alebo uhlopriečky. V oboch prípadoch to musia byť dve zhodné úsečky, lebo každý lichobežník, ktorému možno opísať kružnicu, je rovnoramenný. Osi jeho základní totiž musia prechádzať stredom opísanej kružnice, takže splývajú a tvoria tak os súmernosti celého lichobežníka. Naopak každé dve tetivy jednej kružnice, ktoré majú rovnakú dĺžku kratšiu ako priemer kružnice, nie sú rovnobežné a nemajú spoločný krajný bod, tvoria buď ramená, alebo uhlopriečky (rovnoramenného) lichobežníka (stačí si uvedomiť, že ľubovoľné dve zhodné tetivy jednej kružnice sú súmerne združené podľa priamky prechádzajúce stredom uvedenej kružnice a priesečníkom prislúchajúcich sečníc).

V pravidelnom 19-uholníku $A_1A_2 \ldots A_{19}$ majú zrejme všetky úsečky A_iA_j dokopy len 9 rôznych dĺžok. Vo vybranej sedemprvkovej množine vrcholov má oba krajné body celkom $(7 \cdot 6) : 2 = 21$ úsečiek. Keďže $21 > 2 \cdot 9$, podľa Dirichletovho princípu niektoré tri z týchto úsečiek majú rovnakú dĺžku (t. j. sú zhodné). Keby každé dve z týchto troch úsečiek mali spoločný vrchol (a vieme, že z ľubovoľného vrcholu vychádzajú nanajvýš dve zhodné strany či uhlopriečky), vytvorili by tieto tri úsečky rovnostranný trojuholník, čo nie je možné, lebo $3 \nmid 19$. Preto niektoré dve z týchto troch zhodných úsečiek nemajú spoločný krajný bod, takže to sú buď ramená, alebo uhlopriečky rovnoramenného lichobežníka (protiľahlé strany rovnobežníka to byť nemôžu).

Návodné a doplňajúce úlohy:

Užitočný *Dirichletov (priehradkový) princíp* sa najčastejšie uvádza s dvoma prirodzenými číslami k a n takto: „Ak je aspoň $nk+1$ predmetov rozdelených do n priehradiek, v niektorej z nich je aspoň $k+1$ z týchto predmetov.“ Aj keď je to veľmi jednoduché tvrdenie (zdôvodnite ho sami), nachádza použitie v mnohých situáciách (často dokonca s hodnotou $k = 1$).

N1. Z ľubovoľných 82 prirodzených čísel možno vybrať dve čísla tak, aby ich rozdiel bol deliteľný číslom 81. Dokážte. [Rozdeľte čísla na skupiny podľa ich zvyšku po delení číslom 81.]

N2. Ak vyberieme z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ ľubovoľne 12 rôznych čísel, tak rozdiel niektorých dvoch z nich bude dvojciferné číslo zapísané dvoma rovnakými ciframi. Dokážte. [Rozdeľte čísla na skupiny podľa ich zvyšku po delení číslom 11.]

N3. Dokážte, že zo 111 rôznych celých čísel sa vždy dá vybrať jedenásť takých, že ich súčet je deliteľný jedenástimi. [Využite to, že súčet 11 čísel s rovnakým zvyškom po delení číslom 11 je násobkom čísla 11.]

N4. Žiadne z daných 17 celých čísel nie je deliteľné číslom 17. Dokážte, že súčet niekoľkých z týchto čísel je násobkom čísla 17. [Dané čísla označte $a_1, \ldots, a_{17}$ a uvažujte zvyšky 17 súčtov $s_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 17)$ po delení číslom 17; ak nie je žiadny z nich rovný 0, dávajú dva zo súčtov $s_i < s_j$ ten istý zvyšok modulo 17, takže číslom 17 je deliteľný rozdiel $s_j - s_i$ pre niektoré $i < j$.]

N5. Tabuľka 6×6 je zaplnená číslami $-1, 0, 1$. Sčítame čísla v jednotlivých riadkoch, stĺpcoch aj oboch uhlopriečkach. Dostaneme $6+6+2 = 14$ súčtov. Dokážte, že niektoré dva z nich sa rovnajú. [Všetky súčty ležia v množine celých čísel z intervalu $\langle -6, +6 \rangle$, ktorá má len 13 prvkov.]

N6. Aký najväčší počet kráľov môžeme umiestniť na šachovnicu 8×8, aby sa žiadni dvaja navzájom neohrozovali? [16. Rozdeľte celú šachovnicu na 16 dielov 2×2.]

N7. Dokážte, že ak vyberieme v rovnostrannom trojuholníku so stranou a ľubovoľne 10 bodov, tak vzdialenosť niektorých dvoch vybraných bodov bude nanajvýš $a/3$. [Celý trojuholník rozdeľte na 9 rovnostranných trojuholníkov so stranou $a/3$.]

N8. Desať rodín z jedného domu bolo na dovolenke v zahraničí. Každá cestovala inde a poslala domov pohľadnice piatim zo zvyšných rodín. Dokážte, že niektoré dve rodiny si poslali pohľadnice navzájom. [Všetkých pohľadníc bolo 50, rôznych dvojprvkových množín $\{\text{odosielateľ}, \text{adresát}\}$ je len $(10 \cdot 9) : 2 = 45$.]

D1. Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ vyberte čo najväčší počet čísel tak, aby súčet žiadnych dvoch vybraných čísel nebol násobkom jedenástich. (Vysvetlite, prečo zvolený výber má požadovanú vlastnosť a prečo žiadny výber väčšieho počtu čísel nevyhovuje.) [58–C–I–5]

---

5. *Určte všetky celé čísla n, pre ktoré $2n^3 - 3n^2 + n + 3$ je prvočíslo.* (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Ukážeme, že jedinými celými číslami, ktoré vyhovujú úlohe, sú $n = 0$ a $n = 1$.

Upravme najskôr výraz $V = 2n^3 - 3n^2 + n + 3$ nasledujúcim spôsobom:

$$V = (n^3 - 3n^2 + 2n) + (n^3 - n) + 3 = (n-2)(n-1)n + (n-1)n(n+1) + 3.$$

Oba súčiny $(n-2)(n-1)n$ a $(n-1)n(n+1)$ v upravenom výraze V sú deliteľné tromi pre každé celé číslo n (v oboch prípadoch sa jedná o súčin troch po sebe idúcich celých čísel), takže výraz V je pre všetky celé čísla n deliteľný tromi. Hodnota výrazu V je preto prvočíslom práve vtedy, keď $V = 3$, teda práve vtedy, keď súčet oboch spomenutých súčinov je rovný nule:

$$0 = (n-2)(n-1)n + (n-1)n(n+1) = n(n-1)[(n-2) + (n+1)] = n(n-1)(2n-1)$$

Poslednú podmienku však spĺňajú iba dve celé čísla n, a to $n = 0$ a $n = 1$. Tým je úloha vyriešená.

Poznámka. Fakt, že výraz V je deliteľný tromi pre ľubovoľné celé n, môžeme odvodiť aj tak, že doňho postupne dosadíme $n = 3k$, $n = 3k + 1$ a $n = 3k + 2$, pričom k je celé číslo, rozdelíme teda všetky celé čísla n na tri skupiny podľa toho, aký dávajú zvyšok po delení tromi.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. a) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo m je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 60.
b) Určte všetky prirodzené čísla m, pre ktoré je rozdiel $m^6 - m^2$ deliteľný číslom 120. [C–55–I–1]

N2. Pre ktoré dvojciferné čísla n je číslo $n^3 - n$ deliteľné číslom sto? [C–50–S–3]

D1. Dokážte, že pre ľubovoľné celé čísla n a k väčšie ako 1 je číslo $n^{k+2} - n^k$ deliteľné dvanástimi. [C–59–II–1]

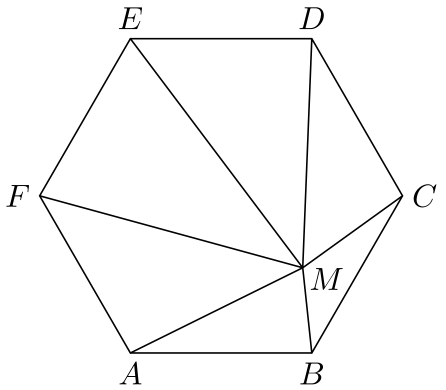
---

6. *Vnútri pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ s obsahom $30\,\mathrm{cm}^2$ je zvolený bod M. Obsahy trojuholníkov ABM a BCM sú postupne $3\,\mathrm{cm}^2$ a $2\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsahy trojuholníkov CDM, DEM, EFM a FAM.* (Pavel Leischner)

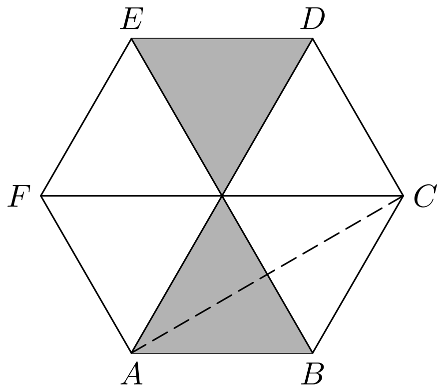
Riešenie. Úloha je o obsahu šiestich trojuholníkov, na ktoré je daný pravidelný šesťuholník rozdelený spojnicami jeho vrcholov s bodom M (obr. 3). Celý šesťuholník s daným obsahom, ktorý označíme S, možno rozdeliť na šesť rovnostranných trojuholníkov s obsahom $S/6$ (obr. 4). Ak označíme r ich stranu, v vzdialenosť rovnobežiek AB, CD a v_1 vzdialenosť bodu M od priamky AB, dostaneme

$$S_{ABM} + S_{EDM} = \frac{1}{2}rv_1 + \frac{1}{2}r(v - v_1) = \frac{1}{2}rv = \frac{S}{3},$$

lebo $S/3$ je súčet obsahov dvoch vyfarbených rovnostranných trojuholníkov. Vďaka symetrii majú tú istú hodnotu $S/3$ aj súčty $S_{BCM} + S_{EFM}$ a $S_{CDM} + S_{FAM}$. Odtiaľ už dostávame prvé dva neznáme obsahy $S_{DEM} = S/3 - S_{ABM} = 7\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{EFM} = S/3 - S_{BCM} = 8\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 3



Obr. 4

Ako určiť zvyšné dva obsahy S_{CDM} a S_{FAM}, keď zatiaľ poznáme len ich súčet $S/3$? Všimnime si, že súčet zadaných obsahov trojuholníkov ABM a BCM má významnú hodnotu $S/6$, ktorá je aj obsahom trojuholníka ABC (to vyplýva opäť z obr. 4). Taká zhoda obsahov znamená práve to, že bod M leží na uhlopriečke AC. Trojuholníky ABM a BCM tak majú zhodné výšky zo spoločného vrcholu B a to isté platí aj pre výšky trojuholníkov CDM a FAM z vrcholov F a D (t. j. bodov, ktoré majú od priamky AC rovnakú vzdialenosť). Pre pomery obsahov týchto dvojíc trojuholníkov tak dostávame

$$\frac{S_{CDM}}{S_{FAM}} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{S_{BCM}}{S_{ABM}} = \frac{2}{3}.$$

V súčte $S_{CDM} + S_{FAM}$ majúcom hodnotu $S/3$ sú teda sčítance v pomere $2 : 3$. Preto $S_{CDM} = 4\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{FAM} = 6\,\mathrm{cm}^2$.

Návodné a doplňajúce úlohy:

N1. V danom rovnobežníku $ABCD$ je bod E stred strany BC a bod F leží vnútri strany AB. Obsah trojuholníka AFD je $15\,\mathrm{cm}^2$ a obsah trojuholníka FBE je $14\,\mathrm{cm}^2$. Určte obsah štvoruholníka $FECD$. [57–C–S–2]

N2. V ostrouhlom trojuholníku ABC označme D pätu výšky z vrcholu C a P, Q zodpovedajúce päty kolmíc vedených bodom D na strany AC a BC. Obsahy trojuholníkov ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupne S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočítajte $S_1 : S_3$, ak $S_1 : S_2 = 2 : 3$ a $S_3 : S_4 = 3 : 8$. [55–C–I–5]

D1. Základňa AB lichobežníka $ABCD$ je trikrát dlhšia ako základňa CD. Označme M stred strany AB a P priesečník úsečky DM s uhlopriečkou AC. Vypočítajte pomer obsahov trojuholníka CDP a štvoruholníka $MBCP$. [55–C–II–1]

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Karel Horák, Peter Novotný, Martin Panák, Jaromír Šimša
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012