62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z9*

---

1. *Na tabuli bolo napísané trojciferné prirodzené číslo. Pripísali sme k nemu všetky ďalšie trojciferné čísla, ktoré možno získať zmenou poradia jeho cifier. Na tabuli tak boli okrem pôvodného čísla ešte tri nové. Súčet najmenších dvoch zo všetkých štyroch čísel je* 1 088. *Aké cifry obsahuje pôvodné číslo?* (*L. Hozová*)

Nápad. Zistite, či pôvodné číslo obsahuje nulu a či sa v ňom opakujú cifry.

Riešenie. Označme použité cifry a, b, c. Zo zadania je zrejmé, že cifry sa v trojcifernom čísle neopakujú, t. j. a, b a c sú navzájom rôzne. Keby totiž niektoré dve cifry boli rovnaké, zmenou ich poradia by sme dokopy dostali nanajvýš tri rôzne čísla: ak by napr. $a = b \neq c$ a všetky cifry boli nenulové, tak uvedené čísla by boli

$$aac,\ aca,\ caa.$$

Podobne môžeme usúdiť, že medzi použitými ciframi musí byť 0. Keby totiž a, b a c boli navzájom rôzne a nenulové cifry, zmenou ich poradia by sme dostali práve šesť rôznych čísel:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Použité cifry sú teda navzájom rôzne a obsahujú nulu; bez akejkoľvek ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $a = 0$ a $b < c$. Zmenou poradia takých cifier dostaneme práve nasledujúce štyri čísla (píšeme ich usporiadané od najmenšieho):

$$b0c,\ bc0,\ c0b,\ cb0.$$

Zvyšok úlohy riešime ako algebrogram:

$$\begin{array}{r} b\,0\,c \\ b\,c\,0 \\ \hline 1\,0\,8\,8 \end{array}$$

Zo súčtu jednotiek $c + 0 = 8$ vyplýva, že $c = 8$ (to súhlasí aj so stĺpcom desiatok: $0 + c = 8$). Zo súčtu stoviek $b + b = 10$ vyplýva, že $b = 5$. Pôvodné trojciferné číslo musí obsahovať cifry 0, 5 a 8.

---

2. *Trojuholník má dve strany, ktorých dĺžky sa líšia o* 12 cm, *a dve strany, ktorých dĺžky sa líšia o* 15 cm. *Obvod tohto trojuholníka je* 75 cm. *Určte dĺžky jeho strán. Nájdite všetky možnosti.* (*L. Šimůnek*)

Nápad. Dĺžku jednej strany označte ako neznámu a pomocou nej potom vyjadrite dĺžky ostatných strán. Uvedomte si, koľko možností je potrebné rozobrať.

Riešenie. Dĺžky dvoch strán, ktoré sa líšia o 12 cm, označíme s a $s + 12$. Tretia strana sa od niektorej z týchto dvoch líši o 15 cm. Nie je zadané, od ktorej z nich a či je o 15 cm väčšia alebo menšia; preto musíme rozobrať nasledujúce štyri možnosti:

	dĺžky strán trojuholníka		
1. možnosť	s	$s+12$	$s+15$
2. možnosť	s	$s+12$	$s-15$
3. možnosť	s	$s+12$	$s+12+15$
4. možnosť	s	$s+12$	$s+12-15$

Obvod trojuholníka má byť 75 cm. Odtiaľ pre každú možnosť zostavíme rovnicu a z nej vypočítame príslušné s. Na ukážku uvádzame iba výpočet zodpovedajúci 1. možnosti:

$$\begin{aligned} s+(s+12)+(s+15) &= 75, \\ 3s+27 &= 75, \\ 3s &= 48, \\ s &= 16. \end{aligned}$$

Výsledné s potom dosadíme do tabuľky:

	dĺžky strán trojuholníka		
1. možnosť	16	28	31
2. možnosť	26	38	11
3. možnosť	12	24	39
4. možnosť	22	34	19

Aby vypočítané hodnoty skutočne zodpovedali stranám nejakého trojuholníka, musia platiť trojuholníkové nerovnosti. Preto ešte skontrolujeme, či najväčšie číslo v každom riadku je menšie ako súčet zvyšných dvoch. Táto nerovnosť platí iba pri 1. a 4. možnosti. Úloha má teda dve riešenia: dĺžky strán trojuholníka môžu byť 16 cm, 28 cm a 31 cm, alebo 19 cm, 22 cm a 34 cm.

---

3. *Pri horskej chate nám tréner povedal: „Ak pôjdeme ďalej týmto pohodlným tempom 4 km za hodinu, prídeme na stanicu 45 minút po odchode nášho vlaku.“ Potom ukázal na skupinu, ktorá nás práve míňala: „Tí majú lepšiu obuv, a tak dosahujú priemernú rýchlosť 6 km za hodinu. Na stanici budú už pol hodiny pred odchodom nášho vlaku.“ Ako ďaleko bola stanica od horskej chaty?* (M. Volfová)

Nápad. Pripomeňte si vzťahy medzi priemernou rýchlosťou, celkovou vzdialenosťou a potrebným časom.

Riešenie. Čas od okamihu, keď nás tréner motivoval pri horskej chate, do odchodu vlaku označme t (v hodinách). Dĺžku trasy z chaty na stanicu označme s (v km).

Pri pohodlnom tempe by sme išli $\frac{s}{4}$ hodín a prišli by sme tri štvrte hodiny po odchode vlaku; platí teda

$$\frac{s}{4} = t + \frac{3}{4}.$$

Chôdza v lepšej obuvi trvá $\frac{s}{6}$ hodín, čo je o pol hodiny menej ako t; platí teda

$$\frac{s}{6} = t - \frac{1}{2}.$$

Z oboch rovníc vyjadríme t:

$$t = \frac{s}{4} - \frac{3}{4}, \quad t = \frac{s}{6} + \frac{1}{2},$$

a tak dostaneme novú rovnicu:

$$\frac{s}{4} - \frac{3}{4} = \frac{s}{6} + \frac{1}{2}.$$

Jej úpravami získame dĺžku trasy s:

$$\begin{aligned} 3s - 9 &= 2s + 6, \\ s &= 15. \end{aligned}$$

Trasa z chaty na stanicu bola dlhá 15 km.

Poznámka. K výsledku môžeme dospieť aj nasledovne. Z prvých dvoch vyššie zostavených rovníc vyjadríme s:

$$s = 4t + 3, \quad s = 6t - 3,$$

a tak dostaneme novú rovnicu

$$4t + 3 = 6t - 3,$$

odkiaľ ľahko vyjadríme $t = 3$. Spätným dosadením dostaneme

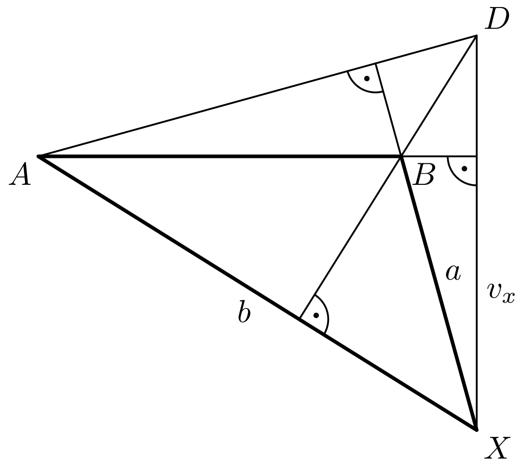
$$s = 12 + 3 = 18 - 3 = 15.$$

---

4. *Do kružnice s polomerom* 5 cm *je vpísaný pravidelný osemuholník $ABCDEFGH$. Zostrojte trojuholník ABX tak, aby bod D bol ortocentrom (priesečníkom výšok) trojuholníka ABX.* (*M. Mach*)

Nápad. Pre začiatok nepracujte s osemuholníkom: skonštruujte ortocentrum D vo všeobecnom trojuholníku ABX a snažte sa zrekonštruovať X, keď poznáte A, B a D.

Riešenie. Aby sme si uvedomili súvislosti, uvažujeme najskôr všeobecný trojuholník ABX a zostrojíme jeho ortocentrum D. Na obr. 1 je naznačené riešenie pre tupouhlý trojuholník, v tomto prípade leží ortocentrum zvonka trojuholníka. (Všimnite si, že pri ostrouhlom trojuholníku by ortocentrum bolo vnútri a pri pravouhlom by splývalo s vrcholom, pri ktorom je pravý uhol.)



Obr. 1

Teraz rozoberieme, ako zostrojiť trojuholník ABX, ak je daná jeho strana AB a ortocentrum D. Z úvodnej diskusia vieme, že ak D leží na priamke AB, tak $D = A$ alebo $D = B$ a vrchol X v tomto prípade nemožno určiť jednoznačne. Preto predpokladáme, že body A, B a D sú vo všeobecnej polohe, t. j. neležia na jednej priamke.

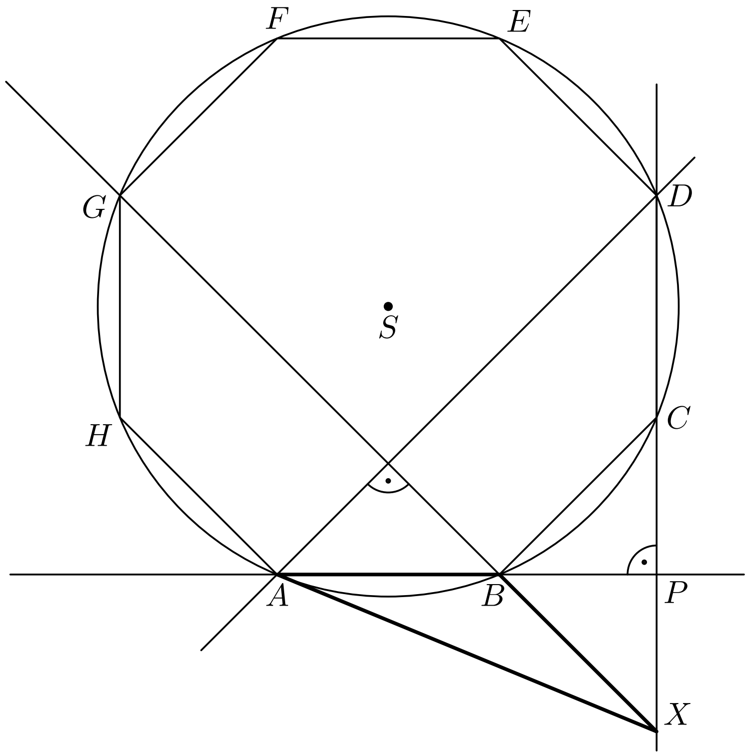
Vrchol X je spoločným bodom priamok obsahujúcich strany a, b a výšku v_x; keď zostrojíme aspoň dve z týchto troch priamok, bude X daný ako ich priesečník. Výška v_x leží na priamke, ktorá je kolmá na AB a prechádza bodom D. Zvyšné dve výšky v budúcom trojuholníku ležia na priamkach AD, príp. BD. Priamka určená stranou a je kolmá na AD a prechádza bodom B (podobne strana b je kolmá na BD a prechádza cez A). Odtiaľ vyplýva nasledujúca možná konštrukcia trojuholníka ABX, keď je daná jeho strana AB a ortocentrum D:

1. zostrojiť priamku, ktorá je kolmá na AB a prechádza bodom D,
2. zostrojiť priamku, ktorá je kolmá na AD a prechádza bodom B,
3. označiť X priesečník priamok z predošlých dvoch krokov,
4. narysovať trojuholník ABX.

(Namiesto 1. alebo 2. kroku konštrukcie možno tiež uvažovať priamku, ktorá je kolmá na BD a prechádza bodom A.)

Teraz rozoberieme, ako vyzerá predchádzajúca konštrukcia bodu X pre trojicu A, B a D v takej špeciálnej polohe, ktorá je opísaná v zadaní pomocou pravidelného osemuholníka.

1. Kolmicou na priamku AB prechádzajúcou bodom D je práve priamka CD. (Označme P priesečník priamok AB a CD. V trojuholníku BCP majú vnútorné uhly pri vrcholoch B a C veľkosť $45°$, pretože sa jedná o vonkajšie uhly pravidelného osemuholníka. Uhol pri vrchole P je preto pravý.)
2. Kolmicou na priamku AD prechádzajúcou bodom B je práve priamka BG. (Podobne ako vyššie môžeme ukázať, že priamky AH a BC sú kolmé. Uhlopriečka BG je rovnobežná s AH, podobne AD je rovnobežná s BC, takže priamky AD a BG sú tiež kolmé.)
3. Bod X je priesečníkom priamok CD a BG.
4. Výsledný trojuholník je zvýraznený na obr. 2.

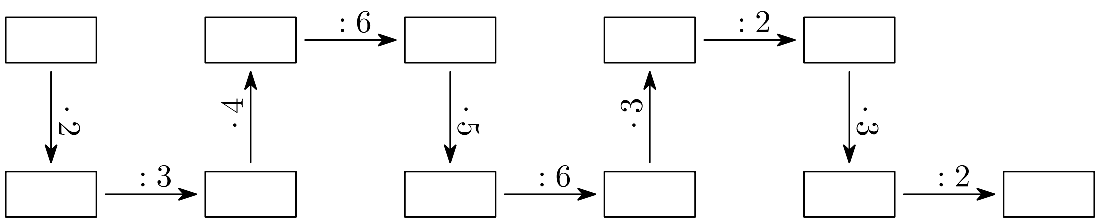


Obr. 2

Poznámka. Všimnite si, že vyššie opísaná konštrukcia je práve konštrukcia ortocentra trojuholníka ABD. Platí teda, že ak je bod D ortocentrom (všeobecného) trojuholníka ABX, tak bod X je ortocentrom trojuholníka ABD. (Podobne bod B je ortocentrom trojuholníka ADX a bod A je ortocentrom trojuholníka BDX.)

---

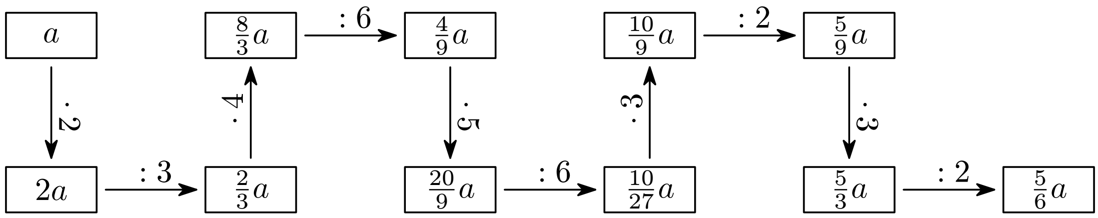
5. *Do každého políčka schémy na obr. 3 máme zapísať štvorciferné prirodzené číslo tak, aby všetky naznačené výpočtové operácie boli správne. Koľkými rôznymi spôsobmi možno schému vyplniť?* (*L. Šimůnek*)



Obr. 3

Nápad. Číslo v nejakom políčku označte ako neznámu a pomocou nej vyplňte celú schému.

Riešenie. Číslo v prvom políčku označíme neznámou a a pomocou nej vyjadríme čísla vo všetkých ostatných políčkach ako na obr. 4 (zlomky uvádzame v základnom tvare).



Obr. 4

Aby všetky zapísané výrazy predstavovali celé čísla, musí byť neznáma a deliteľná všetkými uvedenými menovateľmi. Najmenším spoločným násobkom menovateľov 3, 9, 27 a 6 je číslo 54. Neznáma a tak musí byť násobkom čísla 54.

Ďalej zohľadníme podmienku, že všetky zapísané čísla majú byť štvorciferné. Najmenším zapísaným číslom je $\frac{10}{27}a$ a najväčším je $\frac{8}{3}a$. Preto musí platiť:

- $\frac{10}{27}a \geqq 1\,000$, po úprave $a \geqq 2\,700$,
- $\frac{8}{3}a \leqq 9\,999$, po úprave $a \leqq 3\,749\frac{5}{8}$.

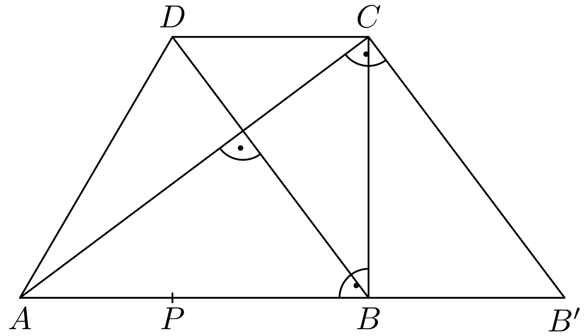
Určíme počet násobkov čísla 54 v intervale od 2 700 po 3 749. Najmenším z nich je hneď 2 700 a ďalej ich je ešte 19, pretože $(3\,749 - 2\,700) : 54 = 19$ (zvyšok 23). Do prvého políčka môžeme teda doplniť celkom 20 rôznych čísel, čiže schému môžeme vyplniť 20 spôsobmi.

---

6. *Daný je pravouhlý lichobežník $ABCD$ s pravým uhlom pri vrchole B a s rovnobežnými stranami AB a CD. Uhlopriečky lichobežníka sú na seba kolmé a majú dĺžky $|AC| = 12\,\mathrm{cm}$, $|BD| = 9\,\mathrm{cm}$. Vypočítajte obvod a obsah tohto lichobežníka.* (M. Krejčová)

Nápad. Obsah tohto lichobežníka je rovnaký ako obsah vhodného pravouhlého trojuholníka. Najskôr nájdite taký trojuholník, potom určte dĺžky strán lichobežníka a jeho obvod.

Riešenie. Bodom C vedieme rovnobežku s uhlopriečkou BD a jej priesečník s priamkou AB označíme B' (obr. 5). Keďže priamky AB a CD sú tiež rovnobežné, je $BB'CD$ kosodĺžnik a platí $|B'C| = |BD| = 9\,\mathrm{cm}$ a $|B'B| = |CD|$.



Obr. 5

Zmysel tejto konštrukcie spočíva v pozorovaní, že trojuholníky ACD a $CB'B$ majú rovnaký obsah (strany CD a $B'B$ sú zhodné a výšky oboch trojuholníkov na tieto strany sú rovnaké). Preto je obsah lichobežníka $ABCD$ rovnaký ako obsah trojuholníka $AB'C$ a tento vieme ľahko určiť: Z konštrukcie vyplýva, že trojuholník $AB'C$ je pravouhlý, a zo zadania poznáme obe jeho odvesny $|AC| = 12\,\mathrm{cm}$ a $|B'C| = 9\,\mathrm{cm}$. Obsah trojuholníka $AB'C$, teda aj zadaného lichobežníka, je rovný

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54\,(\mathrm{cm}^2).$$

Aby sme určili obvod lichobežníka, potrebujeme poznať dĺžky všetkých jeho strán.

a) Strana BC je výškou na stranu AB' v práve spomenutom trojuholníku. Z Pytagorovej vety spočítame dĺžku prepony v trojuholníku $AB'C$:

$$|AB'| = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15\,(\mathrm{cm}).$$

Zo znalosti obsahu tohto trojuholníka určíme jeho výšku $|BC|$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot |BC| &= 54, \\ |BC| &= 7{,}2\,(\mathrm{cm}). \end{aligned}$$

b) V pravouhlom trojuholníku ABC poznáme jeho preponu a teraz aj jednu odvesnu; pomocou Pytagorovej vety určíme dĺžku druhej odvesny:

$$|AB| = \sqrt{12^2 - 7{,}2^2} = 9{,}6\,(\mathrm{cm}).$$

c) Zrejme platí $|AB'| = |AB| + |BB'|$ a $|BB'| = |CD|$, odkiaľ ľahko vyjadríme dĺžku strany CD:

$$|CD| = |AB'| - |AB| = 15 - 9{,}6 = 5{,}4\,(\mathrm{cm}).$$

d) Stranu AD môžeme vidieť ako preponu v pravouhlom trojuholníku APD, pričom P je päta kolmice z bodu D na stranu AB. Dĺžky odvesien v tomto trojuholníku sú $|PD| = |BC| = 7{,}2\,\mathrm{cm}$ a $|AP| = |AB| - |CD| = 9{,}6 - 5{,}4 = 4{,}2\,(\mathrm{cm})$. Podľa Pytagorovej vety spočítame aj dĺžku prepony:

$$|AD| = \sqrt{7{,}2^2 + 4{,}2^2} \doteq 8{,}3\,(\mathrm{cm}).$$

Obvod zadaného lichobežníka je teda približne rovný

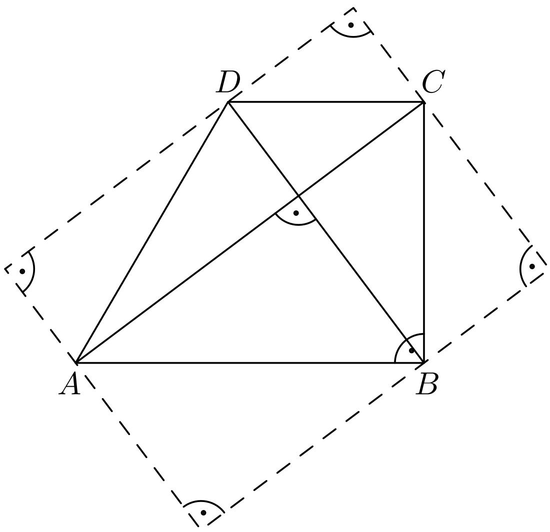
$$o = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| \doteq 9{,}6 + 7{,}2 + 5{,}4 + 8{,}3 = 30{,}5\,(\mathrm{cm}).$$

Poznámka. Pre zaujímavosť a kontrolu uvádzame ešte výpočet obsahu lichobežníka pomocou zvyčajného vzorca:

$$S = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|) \cdot |BC| = \frac{1}{2}(9{,}6 + 5{,}4) \cdot 7{,}2 = 54\,(\mathrm{cm}^2).$$

Všimnite si, že úvahy v úvode nášho riešenia platnosť tohto vzorca vlastne zdôvodňujú.

Vzťah pre výpočet obsahu zadaného lichobežníka sa dá odvodiť aj pomocou obr. 6. Na ňom je čiarkovane znázornený obdĺžnik, ktorého každá strana prechádza niektorým vrcholom lichobežníka a je rovnobežná s niektorou jeho uhlopriečkou. Obsah obdĺžnika je rovný súčinu $|AC|\cdot|BD|$. Obsah lichobežníka je evidentne polovičný, teda $S = \frac{1}{2}|AC|\cdot$ $\cdot\,|BD|$.



Obr. 6

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Erika Novotná, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Erika Novotná, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012