62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z5*

---

1. *Mamička zaplatila v kníhkupectve 270 €. Platila dvoma druhmi bankoviek, dvadsaťeurovými a päťdesiateurovými, a presne. Koľko ktorých bankoviek mohla použiť? Uveďte všetky možnosti.* (*M. Krejčová*)

Nápad. Koľko päťdesiateurových bankoviek môžeme použiť, aby bolo možné doplatiť zvyšok dvadsaťeurovými?

Riešenie. Je zrejmé, že päťdesiateurových bankoviek musela mamička použiť menej ako 6, pretože $6 \cdot 50 = 300$ (€). Preberieme postupne všetky možnosti, t. j. že použila päť, štyri, atď. až žiadnu päťdesiateurovú bankovku. Potom zistíme, koľko euro by takto zaplatila a koľko by jej ešte zvýšilo doplatiť. Nakoniec rozhodneme, či by zvyšnú sumu mohla doplatiť iba dvadsaťeurovými bankovkami. Celú diskusiu vyjadríme tabuľkou:

počet 50 € bankoviek	5	4	3	2	1	0
zaplatené	250	200	150	100	50	0
ostáva doplatiť	20	70	120	170	220	270
počet 20 € bankoviek	1	—	6	—	11	—

Mamička mohla zaplatiť tromi spôsobmi:
5 päťdesiateurových a 1 dvadsaťeurová bankovka,
3 päťdesiateurové a 6 dvadsaťeurových bankoviek,
1 päťdesiateurová a 11 dvadsaťeurových bankoviek.

Poznámka. Podobne sa dá postupovať vzhľadom na dvadsaťeurové bankovky, ktorých musí byť menej ako 14 ($14 \cdot 20 = 280$); zodpovedajúca tabuľka bude však v takom prípade podstatne dlhšia.

---

2. *Pat napísal na tabuľu čudný príklad:*

$$550 + 460 + 359 + 340 = 2\,012.$$

Mat to chcel napraviť, preto pátral po neznámom čísle, ktoré by pripočítal ku každému z piatich uvedených čísel, aby potom bol príklad vypočítaný správne. Aké to bolo číslo? (*L. Hozová*)

Nápad. Koľko čísel pripočíta Mat k ľavej a koľko k pravej strane rovnosti?

Riešenie. Súčet štyroch čísel na ľavej strane rovnosti je $550 + 460 + 359 + 340 = 1\,709$; to je o $2\,012 - 1\,709 = 303$ menšie číslo ako na pravej strane rovnosti. K ľavej strane pripočítame Matovo číslo spolu štyrikrát, k pravej len raz. Rozdiel 303 medzi oboma stranami musí teda byť vyrovnaný tromi Matovými číslami. Hľadané číslo je preto $303 :$ $: 3 = 101$.

Poznámka. Pre lepšiu názornosť ešte uvádzame kontrolu predchádzajúceho výsledku: Po pripočítaní na ľavej strane dostávame

$$(550 + 101) + (460 + 101) + (359 + 101) + (340 + 101) = 651 + 561 + 460 + 441 = 2\,113,$$

na pravej strane vychádza

$$2\,012 + 101 = 2\,113.$$

Vidíme, že číslo 101 vyhovuje požiadavkám. Súčasne sa ponúka vhodné znázornenie na rovnoramenných váhach.

---

3. *Rudo dostal na narodeniny budík. Mal z neho radosť a nastavil na ňom presný čas. Odvtedy každé ráno, keď vstával (vrátane sobôt, nedieľ a prázdnin), stlačil presne na 4 sekundy tlačidlo, ktorým sa osvetľuje ciferník. Pritom si všimol, že počas stlačenia tlačidla je čas na budíku zastavený. Inak sa ale budík vôbec neoneskoruje. Popoludní 11. decembra sa Rudo pozrel na svoj budík a zistil, že ukazuje presne o 3 minúty menej, ako by mal. Aký je dátum Rudových narodenín?* (M. Petrová)

Nápad. Koľkokrát stlačil Rudo tlačidlo?

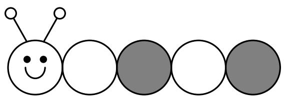
Riešenie. Najskôr zistíme, koľkokrát stlačil Rudo tlačidlo, ktorým sa osvetľuje ciferník: Tlačidlo držal zakaždým 4 sekundy a celkové oneskorenie budíka nakoniec bolo 3 minúty, t. j. 180 sekúnd. Rudo teda stlačil tlačidlo celkom 45-krát $(180 : 4 = 45)$.

Každý deň stlačil tlačidlo ráno po zobudení. Teraz zistíme, ktorý deň ho stlačil po prvý raz, a to tak, že spätne odpočítame 45 dní od 11. decembra: V decembri (od 11. do 1.) je to 11 dní, november (od 30. do 1.) má 30 dní, čo je spolu 41 dní. Potrebujeme odpočítať ešte 4 dni v októbri: 31., 30., 29., 28.

Rudo stlačil osvetľujúce tlačidlo prvýkrát 28. októbra. Budík dostal o deň skôr, teda 27. októbra.

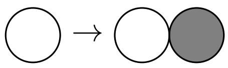
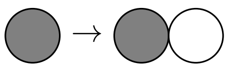
---

4. *Červík sa skladá z bielej hlavy a niekoľkých článkov, pozri obr. 1.*



Obr. 1

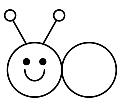
Keď sa červík narodí, má hlavu a jeden biely článok. Každý deň pribudne červíkovi nový článok jedným z nasledujúcich spôsobov:

- *buď sa niektorý biely článok rozdelí na biely a sivý:* 
- *alebo sa niektorý sivý článok rozdelí na sivý a biely:* 

(V oboch prípadoch opisujeme situáciu pri pohľade na červíka od hlavy.) Na štvrtý deň červík dospieva a ďalej nerastie – jeho telo sa skladá z hlavy a štyroch článkov. Koľko najviac rôznych farebných variantov dospelých červíkov tohto druhu môže existovať? (E. Novotná)

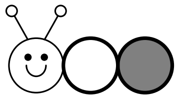
Nápad. Ako môže vyzerať červík starý dva dni?

Riešenie. Prvý deň svojho života má červík iba jeden biely článok (a hlavu):



Obr. 2

Druhý deň mu preto môže dorásť nový článok len prvým z uvedených spôsobov; všetky červíky staré dva dni teda vyzerajú rovnako ako na obr. 3.

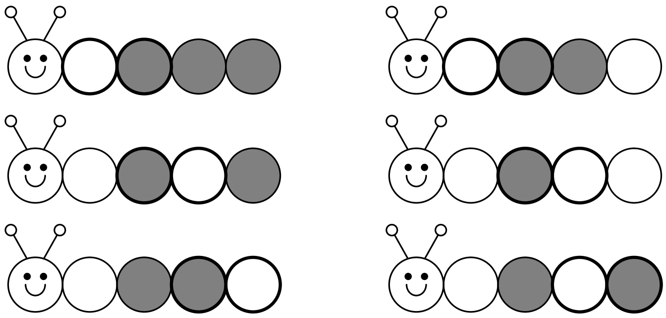


Obr. 3

Tretí deň sa môže rozdeliť buď prvý (biely) alebo druhý (sivý) článok, sú teda dve možnosti ako na obr. 4.

Obr. 4

Štvrtý deň sa môže pri oboch typoch červíkov z predošlého dňa rozdeliť ktorýkoľvek z jeho troch článkov, musíme teda preveriť celkom 6 možností znázornených na obr. 5.



Obr. 5

Porovnaním všetkých šiestich dospelých červíkov zisťujeme, že medzi nimi sú dve dvojice rovnakých červíkov, zvyšné dva červíky sú odlišné od všetkých ostatných. Existujú teda práve štyri rôzne farebné varianty dospelých červíkov tohto zaujímavého druhu.

---

5. *Vypočítajte* $3 \cdot 15 + 20 : 4 + 1$. *Potom doplňte do zadania jeden alebo viac párov zátvoriek tak, aby výsledok bol:*

1. *čo najväčšie celé číslo,*
2. *čo najmenšie celé číslo.*

(*M. Volfová*)

Nápad. Zistite, kde všade môžu byť umiestnené zátvorky.

Riešenie. Zadaný príklad bez akýchkoľvek zátvoriek vychádza

$$3 \cdot 15 + 20 : 4 + 1 = 45 + 5 + 1 = 51.$$

Teraz budeme vkladať zátvorky a priebežne porovnávať výsledky. Snažíme sa vyčerpať všetky možnosti, pritom budeme ignorovať zátvorky, ktoré sú zbytočné, napr.

$$[3 \cdot (15 + 20)] : 4 + 1 = 3 \cdot (15 + 20) : 4 + 1$$

a pod. Najskôr uvádzame možnosti s jednou zátvorkou, následne s dvoma. Umiestniť zmysluplne tri či viacej zátvoriek sa už nedá.

$(3 \cdot 15 + 20) : 4 + 1 = (45 + 20) : 4 + 1 = 65 : 4 + 1$	nedá sa deliť bezo zvyšku
$3 \cdot (15 + 20) : 4 + 1 = 3 \cdot 35 : 4 + 1 = 105 : 4 + 1$	nedá sa deliť bezo zvyšku
$3 \cdot (15 + 20 : 4) + 1 = 3 \cdot (15 + 5) + 1 = 3 \cdot 20 + 1 = 61$	
$3 \cdot (15 + 20 : 4 + 1) = 3 \cdot (15 + 5 + 1) = 3 \cdot 21 = 63$	
$3 \cdot 15 + 20 : (4 + 1) = 45 + 20 : 5 = 45 + 4 = 49$	
$3 \cdot [(15 + 20) : 4 + 1] = 3 \cdot [35 : 4 + 1]$	nedá sa deliť bezo zvyšku
$3 \cdot [15 + 20 : (4 + 1)] = 3 \cdot [15 + 4] = 3 \cdot 19 = 57$	
$(3 \cdot 15 + 20) : (4 + 1) = (45 + 20) : 5 = 65 : 5 = 13$	
$3 \cdot (15 + 20) : (4 + 1) = 3 \cdot 35 : 5 = 105 : 5 = 21$	

Najväčšie číslo sme získali takto:

$$3 \cdot (15 + 20 : 4 + 1) = 63,$$

najmenšie číslo sme získali nasledovne:

$$(3 \cdot 15 + 20) : (4 + 1) = 13.$$

Poznámka. Deti budú zrejme vkladať zátvorky skúšaním. Nemusia pritom overiť všetky možnosti; je pravdepodobné, že budú vynechávať tie, kde sa nedá deliť bezo zvyšku, a že napr. pri hľadaní najväčšieho čísla vynechajú niektoré prípady s tým, že „výsledok by bol moc malý“. Také postupy uznávajte.

Za správne uznávajte aj zdôvodnenie, že na získanie čo najväčšieho celého čísla chceme čo najmenšieho deliteľa a súčasne čo najväčší výraz, ktorý násobíme tromi; pre čo najmenšie celé číslo uvažujeme opačne.

Ak žiaka napadne vložiť začiatok alebo koniec zátvorky doprostred dvojciferného čísla, môže získať najmenšie číslo takto:

$$(3 \cdot 15 + 2)0 : (4 + 1) = 47 \cdot 0 : 5 = 0.$$

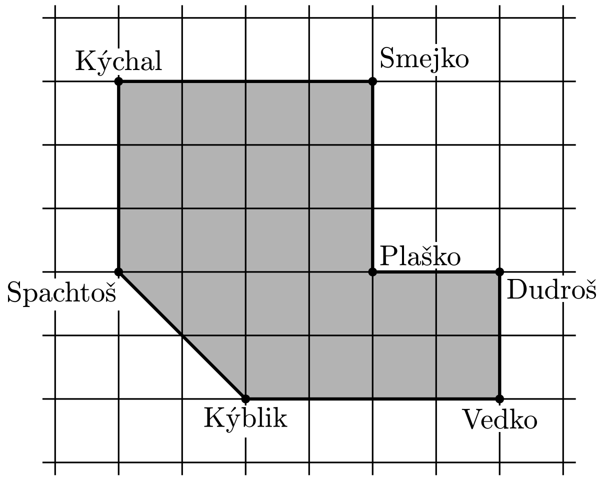
Aj také riešenie uznávajte.

---

6. *Sedem trpaslíkov sa postavilo po obvode svojej záhradky, do každého rohu jeden, a napli medzi sebou povraz okolo celej záhrady. Snehulienka vyšla od Kýblika a išla pozdĺž povrazu. Najskôr išla štyri metre na východ, kde stretla Vedka. Od neho pokračovala dva metre na sever, kým dorazila k Dudrošovi. Od Dudroša išla na západ a po dvoch metroch natrafila na Plaška. Ďalej pokračovala tri metre na sever, až došla k Smejkovi. Vydala sa na západ a po štyroch metroch stretla Kýchala, odkiaľ jej zostávali tri metre na juh k Spachtošovi. Nakoniec pozdĺž povrázka došla najkratšou cestou ku Kýblikovi a tým obišla celú záhradu. Koľko metrov štvorcových má celá záhrada?* (M. Mach)

Nápad. Nakreslite si tvar záhrady, najlepšie na štvorčekový papier.

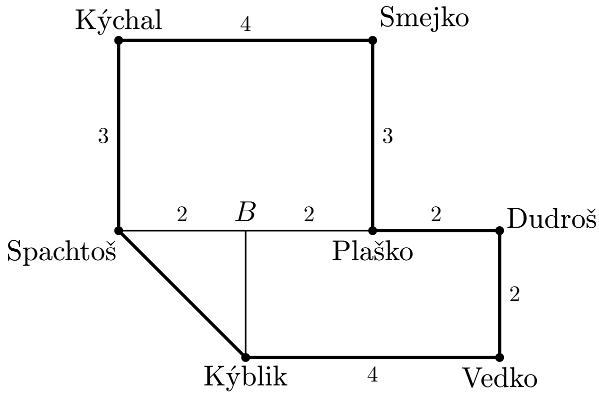
Riešenie. Nakreslíme celú záhradu do štvorčekovej siete, v ktorej jeden štvorček predstavuje jeden meter štvorcový (obr. 6).



Obr. 6

Teraz ľahko určíme plochu útvaru. Najskôr spočítame všetky celé štvorčeky – tých je vo vyznačenej ploche 21. Ešte ostáva pripočítať dva trojuholníčky, ktoré dokopy tvoria jeden ďalší celý štvorček. Napočítali sme 22 štvorčekov, záhrada má teda $22\,\mathrm{m}^2$.

Iné riešenie. Ak nemáme k dispozícii štvorčekový papier, môžeme nákres záhrady rozdeliť ako na obr. 7; spoločný bod pomocných úsečiek označíme B a podľa zadania doplníme veľkosti potrebných strán (všetko v metroch).



Obr. 7

Odtiaľ ľahko určíme obsahy jednotlivých častí:

- Obdĺžnik „Plaško – Smejko – Kýchal – Spachtoš“ má obsah $3 \cdot 4 = 12\,(\mathrm{m}^2)$.
- Obdĺžnik „Kýblik – Vedko – Dudroš – B“ má obsah $4 \cdot 2 = 8\,(\mathrm{m}^2)$.
- Trojuholník „Kýblik – Spachtoš – B“ môžeme chápať ako polovicu štvorca so stranou 2 m rozdeleného uhlopriečkou; jeho obsah je teda polovičný vzhľadom na pôvodný štvorec, t. j. $(2 \cdot 2) : 2 = 2\,(\mathrm{m}^2)$.

Záhrada trpaslíkov má obsah $12 + 8 + 2 = 22\,(\mathrm{m}^2)$.

Slovenská komisia Matematickej olympiády

Autori: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Erika Novotná, Marta Volfová, Vojtěch Žádník

Recenzenti: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Miroslava Smitková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Erika Novotná, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012