2005/2006
55. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 11. – 17. 7. 2006.*)

1. Nech I je stred kružnice vpísanej do trojuholníka ABC. Bod P z vnútra trojuholníka spĺňa

$$|\measuredangle PBA| + |\measuredangle PCA| = |\measuredangle PBC| + |\measuredangle PCB|.$$

Dokážte, že $|AP| \geqq |AI|$, pričom rovnosť nastane práve vtedy, keď $P = I$.
(*Južná Kórea*)

2. Nech P je pravidelný 2006-uholník. Jeho uhlopriečka sa nazýva *dobrá*, ak jej koncové body rozdeľujú hranicu mnohouholníka P na dve časti, z ktorých každá pozostáva z nepárneho počtu strán. Strany mnohouholníka P sa tiež považujú za *dobré*. Predpokladajme, že P je rozdelený na trojuholníky 2003 uhlopriečkami, z ktorých žiadne dve nemajú spoločný bod vo vnútri P. Nájdite maximálny možný počet rovnoramenných trojuholníkov, ktoré majú dve dobré strany. (*Srbsko a Čierna Hora*)

3. Určte najmenšie reálne číslo M tak, aby nerovnosť

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leqq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

platila pre všetky reálne čísla a, b, c. (*Írsko*)

4. Určte všetky dvojice (x, y) celých čísel takých, že

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

(*USA*)

5. Nech $P(x)$ je polynóm stupňa $n > 1$ s celočíselnými koeficientmi a nech k je kladné celé číslo. Uvažujme polynóm $Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, kde P sa vyskytuje k-krát. Dokážte, že existuje najviac n celých čísel t takých, že $Q(t) = t$. (*Rumunsko*)

6. Každej strane b konvexného mnohouholníka P priradíme maximálny obsah trojuholníka, ktorého jedna strana je b a ktorý je obsiahnutý v P. Dokážte, že súčet obsahov priradených všetkým stranám mnohouholníka P je aspoň dvojnásobkom obsahu mnohouholníka P. (*Srbsko a Čierna Hora*)