

62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013

Riešenia úloh obvodného kola kategórie Z5

Informácia pre obvodnú komisiu MO:

Pri každej úlohe sa za akékoľvek úplné riešenie pridružuje 6 bodov. Ak žiak rieši úlohu postupom, ktorý sa odlišuje od všetkých tu uvedených riešení, ale úlohu nevyrieši úplne, bodovacia schéma sa zvolí tak, aby čo najlepšie korešpondovala s návrhom hodnotenia tu uvedeným. Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 9 alebo viac bodov.

Prosíme o zaslanie výsledkových listín obvodných kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe.

Upozorňujeme tiež na možnosť zverejniť výsledkovú listinu obvodného kola na oficiálnej stránke Slovenskej komisie MO: skmo.sk. Stačí poslať výsledkovú listinu e-mailom na adresu skmo@skmo.sk v takom formáte, v akom si ju želáte zverejniť na internete. Na stránke skmo.sk/dokument.php?id=429 nájdete šablónu vo formáte Excelovskej tabuľky, ktorú môžete pri príprave výsledkových listín použiť. Nie je to však povinný formát, môžete použiť aj vlastný. Prosíme len, aby ste dodržali označenie poradia podľa nasledovného príkladu: Ak práve 5 žiakov dosiahne viac bodov ako žiak X.Y. a práve traja žiaci (vrátane X.Y.) dosiahnu rovnako veľa bodov ako X.Y., tak žiakovi X.Y. patrí v poradí 6. – 8. miesto, prípadne skráteno len 6. miesto. Analogickým postupom sa určuje umiestnenie všetkých žiakov.

1. Na tábore sa skauti vážili na starodávnej váhe. Vedúci ich upozornil, že váha síce neváži správne, ale rozdiel medzi skutočnou a nameranou hmotnosťou je vždy rovnaký. Mišovi váha ukázala 30 kg, Emilovi 28 kg, ale keď si stúpili na váhu obaja naraz, ukázala 56 kg. Aká bola skutočná hmotnosť Miša a Emila? (Marta Volfová)

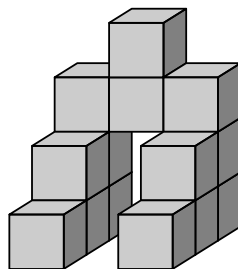
Riešenie. Na Mišovom výsledku 30 kg sa podieľala jedna chyba váhy, rovnako aj na Emilovom výsledku 28 kg bola zahrnutá tá istá chyba váhy.

V súčte $30 + 28 = 58$ (kg) teda sú zahrnuté dve chyby váhy. Keď sa však vážili Mišo s Emilom dokopy, vo výsledku 56 kg bola zahrnutá iba jedna chyba váhy. Rozdiel $58 - 56 = 2$ (kg) teda predstavuje práve jednu chybu váhy.

Skutočná hmotnosť Miša bola $30 - 2 = 28$ (kg), Emil vážil $28 - 2 = 26$ (kg).

Návrh hodnotenia. 4 body za odvodnenie chyby váhy; po 1 bode za hmotnosti Miša a Emila.

2. Na obr. 1 je stavba zlepená zo 14 rovnakých kocôčok. Stavbu chceme zo všetkých strán ofarbiť, teda aj zospodu. Aká bude celková spotreba farby, keď 10 mililitrov farby stačí na ofarbenie jednej celej kocôčky? (Martin Mach)



Obr. 1

Riešenie. Je šesť rôznych smerov, ako sa na stavbu, respektíve na jednotlivé kocôčky stavby, dá pozeráť. Pre každý smer spočítame, koľko stien kocôčok bude treba ofarbiť:

- Keď sa na obrázok pozrieme zhora, vidíme práve 7 stien, ktoré bude treba ofarbiť. Rovnaký počet napočítame pri pohľade zdola.
- Pri pohľade spredu vidíme celkom 8 stien. Rovnaký počet napočítame pri pohľade zozadu.
- Pri pohľade zľava vidíme 7 stien, ale bude treba ofarbiť ešte ďalších 5 stien, ktoré sú zakryté – jedná sa o kocôčky v pravom pilieri stavby. Celkom sme napočítali 12 stien. Pri pohľade sprava je situácia rovnaká.

Celkom teda potrebujeme ofarbiť $2 \cdot (7 + 8 + 12) = 2 \cdot 27 = 54$ stien, čo je rovnaké ako ofarbiť 9 celých kocôčok ($9 \cdot 6 = 54$). Na ofarbenie jednej celej kocôčky treba 10 ml farby, takže celkom potrebujeme $9 \cdot 10 = 90$ (ml) farby.

Iné riešenie. Môžeme postupne prebrať všetky kocôčky v stavbe a určiť, koľko ich stien budeme ofarbovať. Postupujeme po vrstvách zhora nadol, v každej vrstve po radoch spredu dozadu, v každom rade zľava doprava:

- V 1. vrstve je jediná kocôčka, na ktorej budeme ofarbovať 5 stien.
- V 2. vrstve sú tri kocôčky – ofarbujeme postupne $4 + 3 + 4 = 11$ stien.
- V 3. vrstve sú štyri kocôčky – ofarbujeme postupne $4 + 4 + 3 + 3 = 14$ stien.
- Vo 4. vrstve je šesť kocôčok – ofarbujeme postupne $5 + 5 + 3 + 3 + 4 + 4 = 24$ stien.

Celkom teda potrebujeme ofarbiť $5 + 11 + 14 + 24 = 54$ stien. Ďalší postup môže byť rovnaký ako v predchádzajúcom riešení.

Návrh hodnotenia. 4 body za počet stien, ktoré treba ofarbiť; 2 body za určenie potrebného množstva farby.

3. Radka dostala ráno v deň svojich narodenín veľké balenie lentiliiek. Každý deň poobede lentilky maškrtila, a to tak, že v pracovný deň (t. j. mimo víkendu) si vzala vždy 3 lentilky a každú sobotu aj nedeľu si ich vzala 5. Istý deň večer zistila, že zjedla práve 111 lentiliiek. Ktorý deň v týždni mohla mať Radka narodeniny? Nájdite obe možnosti.

(Eva Patáková)

Riešenie. Za týždeň Radka zjedla $5 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 25$ lentiliiek. Za štyri týždne ich zjedla 100 a zostávalo 11 lentiliiek. Tento počet potrebujeme podľa podmienok v zadaní úlohy vyjadriť ako súčet niekoľkých trojok a pätiok, a to sa dá jediným spôsobom: $11 = 2 \cdot 3 + 5$.

Radka teda jedla lentilky štyri celé týždne, dva pracovné dni a jeden víkendový deň. To znamená, že Radkino maškrtenie končilo buď trojicou dní štvrtok – piatok – sobota, alebo nedeľa – pondelok – utorok. V prvom prípade vychádzajú Radkine narodeniny na štvrtok, v druhom prípade na nedeľu.

Iné riešenie. Rovnako ako vyššie zistíme, že za štyri týždne Radka zjedla 100 lentiliiek.

Postupne preskúšame všetky možnosti, kedy mohla mať Radka narodeniny:

narodeniny	množstvo zjedených lentiliiek	záver
pondelok	..., 100 (ne), 103 (po), 106 (ut), 109 (st), 112 (št)	nevychádza
utorok	..., 100 (po), 103 (ut), 106 (st), 109 (št), 112 (pi)	nevychádza
streda	..., 100 (ut), 103 (st), 106 (št), 109 (pi), 114 (so)	nevychádza
štvrtok	..., 100 (st), 103 (št), 106 (pi), 111 (so)	vychádza
piatok	..., 100 (št), 103 (pi), 108 (so), 113 (ne)	nevychádza
sobota	..., 100 (pi), 105 (so), 110 (ne), 113 (po)	nevychádza
nedeľa	..., 100 (so), 105 (ne), 108 (po), 111 (ut)	vychádza

Radka mohla mať narodeniny buď vo štvrtok, alebo v nedeľu.

Návrh hodnotenia. 1 bod za určenie, že za týždeň Radka zjedla 25 lentiliiek; 1 bod za určenie, že takto môžeme odpočítať 100 lentiliiek; 2 body za kľúčovú myšlienku riešenia (rozdelenie $3 + 3 + 5$, navrhnutie tabuľky a pod.); po 1 bode za každé správne riešenie.

Za nájdenie a zdôvodnenie jedného správneho riešenia udeľte nanaajvyš 5 bodov. Ak riešiteľ jedno z riešení uhádne, dajte 1 bod.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Libuše Hozová, Veronika Hucíková, Marie Krejčová, Martin Mach, Eva Patáková, Karel Pazourek, Michaela Petrová, Miroslava Smitková, Libor Šimůnek, Erika Novotná, Marta Volfová, Vojtěch Žád-
ník

Recenzenti: Svetlana Bednářová, Monika Dillingerová, Veronika Hucíková, Miroslava Smit-
ková, Erika Novotná, Peter Novotný

Redakčná úprava: Erika Novotná, Peter Novotný

Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012