62. ročník Matematickej olympiády
2012/2013 *Riešenia úloh školského kola kategórie C*

---

1. *Danému rovnostrannému trojuholníku vpíšme a opíšme kružnicu. Označme S obsah vzniknutého medzikružia a T obsah kruhu, ktorého priemer je zhodný s dĺžkou strany daného trojuholníka. Ktorý z obsahov S, T je väčší? Svoju odpoveď zdôvodnite.*

(*Leo Boček*)

Riešenie. Ukážeme, že sa oba obsahy rovnajú. Označme A, B, C vrcholy daného trojuholníka a r a R zodpovedajúce polomery jeho vpísanej a opísanej kružnice; dĺžku jeho strany označme a. Obe uvedené kružnice majú spoločný stred S. Označme ešte P bod dotyku vpísanej kružnice so stranou AB. Keďže trojuholník ABC je rovnostranný, je P zároveň stredom strany AB. Použitím Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku PSB dostávame

$$R^2 - r^2 = \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2,$$

čo je ekvivalentné s dokazovaným tvrdením $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = T$.

Poznámka. Rovnostranný trojuholník so stranou a má výšku veľkosti $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, takže skúmané polomery sú $R = \frac{2}{3}v$ $(= \frac{1}{3}a\sqrt{3})$ a $r = \frac{1}{3}v$ $(= \frac{1}{6}a\sqrt{3})$, a preto

$$S = \pi\big(R^2 - r^2\big) = \pi\big(\tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{9}\big)v^2 = \pi \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{3}{4}a^2 = \pi\big(\tfrac{1}{2}a\big)^2 = T.$$

Za úplné riešenie dajte 6 bodov.

---

2. *Určte všetky dvojice a, b celých kladných čísel, pre ktoré platí*

$$a \cdot [a, b] = 4 \cdot (a, b),$$

pričom symbol $[a, b]$ označuje najmenší spoločný násobok a (a, b) najväčší spoločný deliteľ celých kladných čísel a, b. (Jaroslav Švrček)

Riešenie. Ak označíme d najväčšieho spoločného deliteľa čísel a a b, môžeme písať $a = kd$ a $b = ld$, pričom $(k, l) = 1$, takže $[a, b] = kld$. Po dosadení do danej rovnice tak dostaneme

$$kd \cdot kld = 4 \cdot d \qquad \text{a po úprave} \qquad k^2ld = 4.$$

Z poslednej rovnosti je zrejmé, že môže byť jedine $k = 2$ alebo $k = 1$.

Pre $k = 2$ vychádza $l = d = 1$, čomu zodpovedá dvojica $a = 2$, $b = 1$.

Pre $k = 1$ dostávame rovnicu $ld = 4$, ktorá má v obore kladných celých čísel tri riešenia:

1. $l = 4$, $d = 1$ a riešením úlohy je dvojica $a = 1$, $b = 4$;
2. $l = 2$, $d = 2$ a riešením úlohy je dvojica $a = 2$, $b = 4$;
3. $l = 1$, $d = 4$ a riešením úlohy je dvojica $a = 4$, $b = 4$.

Záver. Úlohe vyhovujú práve štyri dvojice kladných celých čísel (a, b), a to $(2, 1)$, $(1, 4)$, $(2, 4)$ a $(4, 4)$.

Iné riešenie. Využijeme známu rovnosť $[a, b] \cdot (a, b) = a \cdot b$, ktorá platí pre všetky celé kladné a, b. Vynásobením oboch strán danej rovnice číslom $[a, b]$ tak dostaneme

$$a[a, b]^2 = 4ab, \qquad \text{čiže} \qquad [a, b]^2 = 4b. \tag{1}$$

Vzhľadom na to, že $[a, b] \geqq b$, a teda

$$4b = [a, b]^2 \geqq b^2,$$

je $b^2 \leqq 4b$, takže $b \leqq 4$. Navyše z upravenej rovnice (1) vyplýva, že $4b$, a teda aj b je druhou mocninou celého čísla. Preskúmaním oboch prípadov $b \in \{1, 4\}$ (dosadíme do pôvodnej rovnice postupne všetky možné hodnoty (a, b), ktorých je konečne veľa, alebo dosadíme do (1) a využijeme to, že a je deliteľom najmenšieho spoločného násobku $[a, b]$) dôjdeme k rovnakému záveru ako v prvom riešení.

Iné riešenie. Keďže zrejme platí $[a, b] \geqq (a, b)$, vyplýva zo zadanej rovnosti nerovnosť $a \leqq 4$, pričom rovnosť $a = 4$ nastane práve vtedy, keď $[a, b] = (a, b)$ čiže $a = b = 4$. To je prvé riešenie danej úlohy, pri všetkých ostatných musí byť $a = 1$, $a = 2$, alebo $a = 3$. Pre $a = 1$ máme rovnicu $1 \cdot b = 4$, takže $(a, b) = (1, 4)$ je druhým riešením. Pre $a = 2$ máme rovnicu $2[2, b] = 4(2, b)$ čiže $[2, b] = 2(2, b)$, odkiaľ podľa možných hodnôt $(2, b) = 1$ a $(2, b) = 2$ dostaneme $b = 1$, resp. $b = 4$; ďalšie dve (tretie a štvrté) riešenia teda sú $(a, b) = (2, 1)$ a $(a, b) = (2, 4)$. Napokon pre $a = 3$ máme rovnicu $3[3, b] = 4(3, b)$, z ktorej vyplýva $3 \mid (3, b)$, čiže $3 \mid b$, takže máme vlastne rovnicu $3b = 12$, ktorej jediné riešenie $b = 4$ však podmienku $3 \mid b$ nesplňa.

Poznámka. Diskusii o prípade $a = 3$ sa možno vyhnúť nasledujúcou úvahou. Prepíšme zadanú rovnicu na tvar

$$\frac{[a, b]}{(a, b)} = \frac{4}{a}.$$

Keďže zlomok na ľavej strane je zrejme celé číslo, musí byť taký aj zlomok na pravej strane, takže a je jedno z čísel 1, 2 alebo 4.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov. Za zmysluplnú manipuláciu s najväčším spoločným deliteľom čísel a a b (ako napr. dosadenie do zadanej rovnice) dajte 1 bod. Za „uhádnutie“ všetkých riešení dajte 1 bod. Ak riešiteľ prevedie úlohu na rozbor konečne veľa prípadov (a je si toho vedomý), dajte 4 body.

---

3. *Každý vrchol pravidelného devätnásťuholníka je ofarbený jednou zo šiestich farieb. Dokážte, že niektorý tupouhlý trojuholník má všetky vrcholy ofarbené rovnakou farbou.* (*Jaromír Šimša*)

Riešenie. Keďže $19 > 6 \cdot 3$, majú rovnakú farbu niektoré štyri vrcholy, ktoré označíme A, B, C, D v poradí na opísanej kružnici. Tie tvoria vrcholy konvexného štvoruholníka, ktorého vnútorné uhly majú súčet $360°$, takže nemôžu byť všetky menšie ako $90°$. Zároveň je zrejmé, že žiadny z nich nemôže byť rovný $90°$, pretože číslo 19 je nepárne. Aspoň jeden z uhlov ABC, BCD, CDA, DAB je teda väčší ako $90°$, a preto je príslušný trojuholník tupouhlý.

Za úplné riešenie dajte 6 bodov, z toho 2 body za konštatovanie, že niektoré štyri vrcholy majú rovnakú farbu.

Úspešným riešiteľom je ten žiak, ktorý získa 10 alebo viac bodov.

Učitelia pošlú opravené riešenia školských kôl predsedom KKMO alebo nimi poverenej osobe do 15. februára.

Slovenská komisia MO, KMANM FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava

Autori:	Vojtech Bálint, Leo Boček, Pavel Calábek, Šárka Gergelitsová, Karel Horák, Radek Horenský, Tomáš Jurík, Aleš Kobza, Pavel Leischner, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný, Martin Panák, Michal Rolínek, Jaromír Šimša, Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf
Recenzenti:	Vojtech Bálint, Tomáš Jurík, Ján Mazák, Pavel Novotný, Peter Novotný
Redakčná úprava:	Karel Horák, Tomáš Jurík, Peter Novotný, Martin Panák, Jaromír Šimša
Vydal:	IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2012