2004/2005
54. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 12. – 18. 7. 2005.*)

1. Na stranách rovnostranného trojuholníka ABC je zvolených šesť bodov: body A_1, A_2 na strane BC, body B_1, B_2 na strane CA a body C_1, C_2 na strane AB. Tieto body sú vrcholmi konvexného šesťuholníka $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ s rovnako dlhými stranami. Dokážte, že priamky A_1B_2, B_1C_2 a C_1A_2 sa pretínajú v jednom bode. (*Rumunsko*)

2. Nech $a_1, a_2, \dots$ je postupnosť celých čísel s nekonečným počtom kladných členov a s nekonečným počtom záporných členov. Predpokladajme, že pre každé prirodzené číslo n čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ po delení číslom n dávajú n rôznych zvyškov. Dokážte, že každé celé číslo sa v postupnosti vyskytuje práve raz. (*Holandsko*)

3. Nech x, y a z sú kladné reálne čísla také, že $xyz \geqq 1$. Dokážte, že

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqq 0.$$

(*Južná Kórea*)

4. Uvažujme postupnosť $a_1, a_2, \dots$ definovanú vzťahom

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Určte všetky kladné celé čísla, ktoré sú nesúdeliteľné s každým členom postupnosti. (*Poľsko*)

5. Nech $ABCD$ je daný konvexný štvoruholník s rovnako dlhými stranami BC a AD, ktoré nie sú rovnobežné. Nech body E a F ležia postupne vnútri strán BC a AD tak, že $|BE| = |DF|$. Priamky AC a BD sa pretínajú v bode P, priamky BD a EF v bode Q, priamky EF a AC v bode R. Uvažujme všetky trojuholníky PQR určené meniacou sa polohou bodov E a F. Ukážte, že kružnice opísané týmto trojuholníkom majú spoločný bod rôzny od P. (*Poľsko*)

6. V matematickej súťaži bolo súťažiacim zadaných 6 úloh. Každú dvojicu úloh vyriešili viac ako 2/5 súťažiacich. Nikto nevyriešil všetkých 6 úloh. Dokážte, že práve 5 úloh vyriešili aspoň dvaja súťažiaci. (*Rumunsko*)