2003/2004

53. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 11. – 17. 7. 2004.*)

1. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník, v ktorom $|AB| \neq |AC|$. Kružnica nad priemerom BC pretína strany AB a AC postupne v bodoch M a N. Označme O stred strany BC. Osi uhlov BAC a MON sa pretínajú v bode R. Dokážte, že kružnice opísané trojuholníkom BMR a CNR prechádzajú spoločným bodom ležiacim na strane BC.

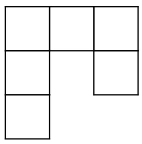
(*Rumunsko*)

2. Nájdite všetky mnohočleny $P(x)$ s reálnymi koeficientmi, ktoré spĺňajú rovnosť

$$P(a-b)+P(b-c)+P(c-a)=2P(a+b+c)$$

pre všetky reálne čísla a, b, c také, že $ab+bc+ca=0$. (*Južná Kórea*)

3. Nazvime *hák* útvar vytvorený zo šiestich jednotkových štvorčekov ako na obr. 1



Obr. 1

alebo ľubovoľný útvar, ktorý vznikne jeho otočením či súmernosťou. Určte všetky pravouholníky $m \times n$, ktoré sa dajú hákmi pokryť tak, že

- pravouholník je pokrytý bez medzier a prekrytí;
- žiadna časť háku nepokrýva plochu mimo pravouholníka. (*Estónsko*)

4. Nech $n \geqq 3$ je celé číslo. Nech $t_1, t_2, \dots, t_n$ sú kladné reálne čísla také, že

$$n^2+1 > (t_1+t_2+\cdots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{t_n}\right).$$

Ukážte, že t_i, t_j, t_k sú dĺžky strán trojuholníka pre všetky i, j, k, kde $1 \leqq i < j < k \leqq n$.

(*Južná Kórea*)

5. V konvexnom štvoruholníku $ABCD$ uhlopriečka BD nerozpoľuje ani jeden z uhlov ABC, CDA. Bod P leží vnútri $ABCD$ a spĺňa rovnosti

$$|\measuredangle PBC| = |\measuredangle DBA| \quad \text{a} \quad |\measuredangle PDC| = |\measuredangle BDA|.$$

Dokážte, že $ABCD$ je tetivový práve vtedy, keď $|AP| = |CP|$. (*Poľsko*)

6. Prirodzené číslo nazveme *striedavé*, ak každé dve susedné číslice v jeho desiatkovom zápise majú rôznu paritu. Nájdite všetky prirodzené čísla n také, že n má striedavý násobok.

(*Irán*)