2002/2003
52. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 12. – 18. 7. 2003.*)

1. Nech A je podmnožina množiny $S = \{1, 2, \dots, 1\,000\,000\}$ obsahujúca práve 101 prvkov. Dokážte, že v S existujú čísla $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ také, že množiny

$$A_j = \{x + t_j : x \in A\} \quad \text{pre } j = 1, 2, \dots, 100$$

sú po dvoch disjunktné. (*Brazília*)

2. Určte všetky dvojice prirodzených čísel (a, b) také, že

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

je prirodzené číslo. (*Bulharsko*)

3. Je daný konvexný šesťuholník, ktorého ľubovoľné dve protiľahlé strany majú nasledujúcu vlastnosť: vzdialenosť ich stredov je $\sqrt{3}/2$ násobok súčtu ich dĺžok. Dokážte, že všetky uhly daného šesťuholníka sú rovnaké.
(Konvexný šesťuholník $ABCDEF$ má tri dvojice protiľahlých strán: AB a DE, BC a EF, CD a FA.) (*Poľsko*)

4. Nech $ABCD$ je tetivový štvoruholník. Označme postupne P, Q a R päty kolmíc z bodu D na priamky BC, CA a AB. Dokážte, že $|PQ| = |QR|$ práve vtedy, keď sa osi uhlov ABC a ADC pretínajú na priamke AC. (*Fínsko*)

5. Nech n je prirodzené číslo a $x_1, x_2, \dots, x_n$ reálne čísla také, že $x_1 \leqq x_2 \leqq \dots \leqq x_n$.
(a) Dokážte, že

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|\right)^2 \leqq \frac{2(n^2-1)}{3} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (x_i - x_j)^2.$$

(b) Ukážte, že rovnosť platí práve vtedy, keď $x_1, x_2, \dots, x_n$ je aritmetická postupnosť.

(*Írsko*)

6. Nech p je prvočíslo. Dokážte, že existuje prvočíslo q také, že pre žiadne celé číslo n nie je číslo $n^p - p$ deliteľné q. (*Francúzsko*)