2001/2002
51. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 23. – 29. 7. 2002.*)

1. Nech n je prirodzené číslo a nech T je množina všetkých bodov (x, y) v rovine, kde x a y sú celé nezáporné čísla a $x+y < n$. Každý bod z množiny T je ofarbený buď červenou, alebo modrou farbou. Ak je bod (x, y) červený, sú červené aj všetky body $(x', y') \in \mathsf{T}$, pre ktoré platí $x' \leqq x$ a $y' \leqq y$. Definujme X-množinu ako množinu n modrých bodov majúcich rôzne x-ové súradnice a Y-množinu ako množinu n modrých bodov majúcich rôzne y-ové súradnice. Dokážte, že počet X-množín je rovný počtu Y-množín.
(*Kolumbia*)

2. Nech BC je priemer kružnice Γ so stredom O. Bod A leží na kružnici Γ tak, že $0° < < |\measuredangle AOB| < 120°$. Nech D je stred toho oblúka AB, na ktorom neleží bod C. Priamka vedená bodom O rovnobežne s DA pretne priamku AC v bode J. Os úsečky OA pretne kružnicu Γ v bodoch E a F. Dokážte, že bod J je stred kružnice vpísanej trojuholníku CEF. (*Južná Kórea*)

3. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel $m, n \geqq 3$ také, že existuje nekonečne veľa prirodzených čísel a, pre ktoré je

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

celé číslo. (*Rumunsko*)

4. Nech n je prirodzené číslo väčšie ako 1. Všetky kladné delitele čísla n označíme $d_1, d_2, \ldots, d_k$, kde

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n.$$

Položme $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k$.

(a) Dokážte, že $D < n^2$.

(b) Určte všetky n, pre ktoré je číslo D deliteľom čísla n^2. (*Rumunsko*)

5. Nech $\mathbb{R}$ označuje množinu všetkých reálnych čísel. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že

$$\big(f(x) + f(z)\big)\big(f(y) + f(t)\big) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

pre ľubovoľné $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. (*India*)

6. V rovine sú dané kružnice $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ s polomerom 1, kde $n \geqq 3$. Ich stredy označme po rade $O_1, O_2, \ldots, O_n$. Predpokladajme, že každá priamka pretína najviac dve z daných kružníc. Dokážte, že

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq n} \frac{1}{|O_iO_j|} \leqq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

(*Ukrajina*)