2000/2001
50. ročník Matematickej olympiády *Zadania úloh IMO*

(*Súťaž sa konala 7. – 13. 7. 2001.*)

1. Nech O je stred kružnice opísanej ostrouhlému trojuholníku ABC. Bod P strany BC je pätou výšky z vrcholu A.

Predpokladajme, že $|\measuredangle BCA| \geqq |\measuredangle ABC| + 30°$.

Dokážte, že $|\measuredangle CAB| + |\measuredangle COP| < 90°$. (*Južná Kórea*)

2. Dokážte, že nerovnosť

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqq 1$$

platí pre všetky kladné reálne čísla a, b, c. (*Južná Kórea*)

3. Matematickej súťaže sa zúčastnilo 21 dievčat a 21 chlapcov.

- Každý súťažiaci vyriešil nanajvýš šesť úloh.
- Pre každé dievča a každého chlapca existuje aspoň jedna úloha, ktorú vyriešili obaja.

Dokážte, že existuje úloha, ktorú vyriešili aspoň tri dievčatá a aspoň traja chlapci! (*Nemecko*)

4. Nech n je nepárne číslo väčšie ako 1 a nech $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sú dané celé čísla. Pre každú z $n!$ permutácií $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ nech

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Dokážte, že existujú dve permutácie b a c, $b \neq c$ také, že $n!$ je deliteľom $S(b) - S(c)$. (*Kanada*)

5. V trojuholníku ABC nech AP rozpoľuje uhol BAC, pričom P leží na strane BC a nech BQ rozpoľuje uhol ABC, pričom Q leží na strane CA.

Je známe, že $|\measuredangle BAC| = 60°$ a že $|AB| + |BP| = |AQ| + |QB|$.

Aké sú možné veľkosti uhlov trojuholníka ABC? (*Izrael*)

6. Nech pre celé čísla a, b, c, d platí $a > b > c > d > 0$. Predpokladajme, že

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Dokážte, že $ab + cd$ nie je prvočíslo! (*Rusko*)